Inhaltsverzeichnis

Literaturhinweis 4
Literatur 4
Konventionen und Definitionen aus der Mengenlehre 5
1. Der Körper der reellen Zahlen 6
1.1. Die Körperaxiome 6
1.2. Folgerungen aus den Axiomen der Addition 8
1.3. Folgerungen aus den Axiomen der Multiplikation 10
1.4. Weitere Definitionen 12
1.5. Angeordnete Körper 14
1.6. Der Satz über die reellen Zahlen 17
1.7. Reelle Zahlen und natürliche Zahlen 20
1.8. Notationen 21
2. Die vollständige Induktion 23
3. Folgen und Reihen 29
3.1. Quantoren 29
3.2. Folgen 31
3.3. Bestimmte Divergenz 40
3.4. Reihen 47
4. Cauchy-Folgen und das Vollständigkeitsaxiom 51
4.1. Das Vollständigkeitsaxiom 51
4.2. Dezimaldarstellung von reellen Zahlen (∗) 55
4.3. Injektive, surjektive und bijektive Abbildung 58
4.4. Abzählbare und überabzählbare Mengen 59
5. Folgerungen aus dem Vollständigkeitsaxiom 63
5.1. Infimum und Supremum 63
5.2. Teilfolgen und der Satz von Bolzano-Weierstraß 69
6. Konvergenz von Reihen 73
6.1. Erinnerung an Reihen 73
6.2. Konvergenzkriterien für Reihen 75
6.3. Absolute Konvergenz von Reihen und das Quotienten-Kriterium 80
6.4. Umordnung von Reihen 83
6.5. Beweis des Umordnungssatzes 6.13 (∗) 85
6.6. Das Cauchy-Produkt für absolut konvergente Reihen 87
6.7. Beweis der Cauchy-Produktformel (∗) 88
6.8. Die Exponentialreihe 89
7. Stetige Funktionen 92
7.1. Beispiele von Funktionen 92
7.2. Definition von Stetigkeit und erste Eigenschaften 92
7.3. Stetigkeit von Funktionen und Grenzwerte von Folgen 96
7.4. Eigenschaften von stetigen Funktionen 98

7.5. Stetigkeit der Exponentialfunktion 100
7.6. Grenzwerte von Funktionen 101
7.7. Gleichmäßige Stetigkeit 105
8. Der Zwischenwertsatz 108
9. Umkehrfunktionen 113
9.1. (Streng) monotone Funktionen 113
9.2. Die Definition von Umkehrfunktionen 115
9.3. Stetigkeit von Umkehrfunktionen 117
9.4. Die Wurzelfunktionen 118
9.5. Die Logarithmusfunktionen 119
9.6. Potenzen von reellen Zahlen 121
10. Die komplexen Zahlen 124
10.1. Der Körper der komplexen Zahlen 124
10.2. Folgen komplexer Zahlen 128
10.3. Reihen von komplexen Zahlen 130
11. Trigonometrische Funktionen 134
11.1. Definition von Sinus und Kosinus 134
11.2. Definition von π 137
11.3. Polarkoordinatendarstellung von komplexen Zahlen 141
11.4. Die Einheitswurzeln $(*)$ 143
12. Differentiation 145
12.1. Definition der Ableitung und erste Eigenschaften 145
12.2. Ableitung der Exponentialfunktion, sowie von Sinus und Kosinus 148
12.3. Die Kettenregel und die Umkehrregel 150
12.4. Stetig differenzierbare Funktionen 153
13. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung 156
13.1. Globale und lokale Extrema von Funktionen 156
13.2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung 157
14. Arkusfunktionen und die Regel von l'Hôpital 164
14.1. Grenzwerte von Quotienten 164
14.2. Umkehrfunktionen von trigonometrischen Funktionen 164
14.3. Die Regel von l'Hôpital 168
15. Das Riemann-Integral 174
15.1. Definition des Riemann-Integrals 174
15.2. Eigenschaften des Riemann-Integrals 178
15.3. Beispiele von integrierbaren Funktionen 182
15.4. Mittelwertsatz der Integralrechnung 185
16. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 187
16.1. Stammfunktionen 187
16.2. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 188
16.3. Bestimmung von Stammfunktionen 190
16.4. Stammfunktionen von elementaren Funktionen $(*)$ 191

16.5. Partielle Integration 191
16.6. Substitution 193
17. Uneigentliche Integrale 197
18. Die Gamma-Funktion (∗) 200
19. Funktionenfolgen (∗) 203
19.1. Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen 203
19.2. Kriterien für die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen 206
19.3. Integrale und Funktionenfolgen 209
20. Potenzreihen 212
20.1. Definition von Potenzreihen 212
20.2. Der Konvergenzradius einer Potenzreihe 214
20.3. Ableitungen und Stammfunktionen von Potenzreihen 217
20.4. Der abelsche Grenzwertsatz und seine Anwendungen 219
21. Das Taylorpolynom 222
21.1. Höhere Ableitungen und C^∞-Funktionen 222
21.2. Approximationen von Funktionen 222
21.3. Taylorpolynome 223
21.4. Die Restgliedformel von Taylor 228
21.5. Die Taylor-Reihe 230
21.6. Eine C^∞-Treppenfunktion 231
Index 234

Literaturhinweis

Zum Erlernen des Stoffes und zur Bearbeitung der Übungsaufgaben reicht das Skript völlig aus. Die Bücher [B, F, K, W] können aber eventuell zur Ergänzung und Vertiefung hilfreich sein. Hierbei steht das Buch von Forster [F] dem Skript am nächsten.

Literatur

[AE] H. Amann und J. Escher. *Analysis 2*, 2. Auflage, Grundstudium Mathematik, Birkhäuser Basel (2006).

[B] T. Bröcker. *Analysis I*, Bibliographisches Institut, Mannheim (1992).

[C] B. Conrad. *Impossibility theorems for elementary integration* `http://math.stanford.edu/~conrad/papers/elemint.pdf`

[DF] D. Dummit and R. Foote. Abstract algebra, 3rd ed. Wiley International Edition (2004).

[E] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, R. Remmert und K. Lamotke. *Zahlen*, 3. Aufl. Springer-Lehrbuch (1992).

[F] O. Forster. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, Springer Spektrum (2015).

[He] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis*, Teubner Verlag (2001).

[Hi] S. Hildebrandt. *Analysis 1*, 2. Auflage. Springer-Lehrbuch (2006).

[K] K. Königsberger. *Analysis 1*, Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag (2004).

[L] E. Landau. *Grundlagen der Analysis*, (Das Rechnen mit ganzen, rationalen, irrationalen, komplexen Zahlen), Ergänzung zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung, Leipzig (1930).

[W] R. Walter. *Einführung in die Analysis 1*, de Gruyter Lehrbuch, Walter de Gruyter & Co. (2007).

Konventionen und Definitionen aus der Mengenlehre

Wir geben in der Vorlesung Analysis I eine axiomatische Einführung in die Analysis. Die einzigen Begriffe, welche wir nicht definieren werden, sind die folgenden:

(1) der Mengenbegriff,
(2) die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ sowie $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3 \dots\}$,
(3) die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

Für Mengen verwenden wir hierbei die folgenden üblichen Schreibweisen:

(1) $\varnothing$ bedeutet die leere Menge, d.h. die Menge ohne Elemente.
(2) $a \in A$ bedeutet, dass a ein Element der Menge A ist.
(3) $A \subset B$ bedeutet, dass A eine Teilmenge von B ist.
(4) Seien $A_1, \dots, A_k$ Mengen, dann schreiben wir

$$A_1 \times \cdots \times A_k \;=\; \{(a_1, \dots, a_k) \,|\, a_1 \in A_1, \dots, a_k \in A_k\}.$$

Beispielsweise ist

$$\{1, 2, 3\} \times \{A, B\} \;=\; \{(1, A), (1, B), (2, A), (2, B), (3, A), (3, B)\}$$

und

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;=\; \{(a_1, a_2, a_3) \,|\, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

ist die Menge der Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

Eine Abbildung $f \colon A \to B$ von einer Menge A zu einer Menge B ordnet jedem Element in A genau ein Element in B zu.[1] Beispielsweise ist

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n^3 - 5n + 2 \end{array}$$

eine Abbildung von der Menge $\mathbb{N}$ zur Menge $\mathbb{Z}$. Hierbei bezeichnet die erste Zeile, dass wir eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ betrachten, während die zweite Zeile die Abbildungsvorschrift angibt, d.h. in diesem Fall wird dem Element $n \in \mathbb{N}$ das Element $n^3 - 5n + 2$ zugeordnet.

Ein weiteres Beispiel ist gegeben durch

$$\begin{array}{rcr} \{A, 1, *\} & \to & \mathbb{Z} \\ A & \mapsto & -5, \\ 1 & \mapsto & 3, \\ * & \mapsto & -5. \end{array}$$

Dies ist eine Abbildung von der Menge $\{A, 1, *\}$ zur Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

Wir werden oft folgende grundlegende Aussage aus der Logik verwenden.

Satz 0.1. (Prinzip der Kontraposition) *Wenn A und B zwei Aussagen sind, dann ist die Aussage "aus A folgt B" äquivalent zur Aussage "aus nicht B folgt nicht A". Oder anders ausgedrückt*

$$A \Longrightarrow B \qquad \textit{ist äquivalent zu} \qquad \textit{Negation von } A \Longleftarrow \textit{Negation von } B.$$

[1] Man kann eine Abbildung $A \to B$ auch definieren als Teilmenge $S \subset A \times B$ mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in S$ gibt. Aber diese Definition ist zu Anfang des Studiums vielleicht nicht sehr hilfreich.

1. Der Körper der reellen Zahlen

1.1. **Die Körperaxiome.** In der Analysis I beschäftigen wir uns mit dem "Körper der reellen Zahlen". Hierbei müssen wir erst einmal den Begriff des "Körpers" einführen.

Definition. Ein *Körper* ist eine Menge K zusammen mit zwei Abbildungen:[2]

$$\begin{array}{rcll} K \times K & \to & K & \text{"Addition"} \\ (a,b) & \mapsto & a+b, & \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcll} K \times K & \to & K & \text{"Multiplikation"} \\ (a,b) & \mapsto & a \cdot b, & \end{array}$$

welche folgende Eigenschaften erfüllen:

(A1) Für alle $x, y, z \in K$ gilt

$$(x+y)+z = x+(y+z) \qquad \text{(Assoziativgesetz).}$$

(A2) Für alle $x, y \in K$ gilt

$$x+y = y+x \qquad \text{(Kommutativgesetz).}$$

(A3) Es existiert ein Element $N \in K$, so dass für alle $x \in K$ gilt:

$$x+N = x \qquad \text{(Existenz eines additiv neutralen Elements).}$$

(A4) Zu jedem $x \in K$ existiert ein Element $y \in K$, so dass

$$x+y = N \qquad \text{(Existenz von additiven Inversen).}$$

(M1) Für alle $x, y, z \in K$ gilt

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \qquad \text{(Assoziativgesetz).}$$

(M2) Für alle $x, y \in K$ gilt

$$x \cdot y = y \cdot x \qquad \text{(Kommutativgesetz).}$$

(M3) Es existiert ein Element $E \in K$, so dass $N \neq E$, und so dass für alle $x \in K$ gilt:

$$x \cdot E = x \qquad \text{(Existenz eines multiplikativ neutralen Elements).}$$

(M4) Zu jedem $x \in K$ mit $x \neq N$ existiert ein Element $z \in K$, so dass

$$x \cdot z = E \qquad \text{(Existenz von multiplikativen Inversen).}$$

(D) Für alle $x, y, z \in K$ gilt

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \qquad \text{(Distributivgesetz).}$$

Wir nennen die Eigenschaften (A1)–(A4) die *Axiome der Addition* und die Eigenschaften (M1)–(M4) die *Axiome der Multiplikation*. Die Eigenschaften (A1)–(A4), (M1)–(M4) sowie (D), welche zusammen einen Körper definieren, werden *Körperaxiome* genannt.

Beispiel.

(1) Die Eigenschaften kommen uns natürlich bekannt vor, beispielsweise erfüllt $K = \mathbb{Q}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation alle Körperaxiome, wobei $N = 0$ und $E = 1$. Mit etwas nachdenken sieht man auch, dass $K = \{a + b \cdot \sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$

[2]Eine Abbildung $K \times K \to K$ ordnet je zwei Elementen a und b in K ein Element in K zu. In diesem Fall bezeichnen wir das a und b zugeordnete Element mit $a + b$ beziehungsweise $a \cdot b$.

mit der üblichen Addition und Multiplikation alle Körperaxiome erfüllt.[3] Anders ausgedrückt, $K = \mathbb{Q}$ und $K = \{a + b \cdot \sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ sind Körper.

(2) Wenn wir $K = \mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation betrachten, dann gelten die Axiome der Addition mit $N = 0$, zudem gelten die Axiome (M1) bis (M3) mit $E = 1$ und das Distributivgesetz. Das Axiom (M4) gilt allerdings nicht, beispielsweise gibt es für $2 \in \mathbb{Z}$ kein $z \in \mathbb{Z}$, so dass $2 \cdot z = 1$.

(3) Neben den Körpern $K = \mathbb{Q}$, welcher aus der Schule bekannt ist, gibt es noch andere Körper. Betrachten wir beispielsweise $\mathbb{F}_2 = \{N, E\}$, d.h. die Menge mit zwei Elementen $\{N, E\}$. Wir definieren die Addition folgendermaßen:[4]

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 & \to & \mathbb{F}_2 \\ (N,N) & \mapsto & N + N := N \\ (N,E) & \mapsto & N + E := E \\ (E,N) & \mapsto & E + N := E \\ (E,E) & \mapsto & E + E := N \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{und wir definieren} \\ \text{die Multiplikation} \\ \text{zudem wie folgt:} \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 & \to & \mathbb{F}_2 \\ (N,N) & \mapsto & N \cdot N := N \\ (N,E) & \mapsto & N \cdot E := N \\ (E,N) & \mapsto & E \cdot N := N \\ (E,E) & \mapsto & E \cdot E := E. \end{array}$$

Wir können diese Abbildungen auch etwas salopper, aber dafür übersichtlicher, mit folgender Additions- und Multiplikationstabelle beschreiben:

$$\begin{array}{|c|cc|} \hline + & N & E \\ \hline N & N & E \\ E & E & N \\ \hline \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{|c|cc|} \hline \cdot & N & E \\ \hline N & N & N \\ E & N & E \\ \hline \end{array}$$

Wir müssen nun zeigen, dass alle Körperaxiome gelten. Beispielsweise sind die Definitionen der Addition und der Multiplikation symmetrisch, also gelten die Kommutativgesetze (A2) and (M2). Es ist auch relativ elementar nachzuprüfen, dass (A3) und (A4) sowie (M3) und (M4) gelten. Es ist hingegen eine etwas umständliche Fieselarbeit zu nachzuweisen, dass die übrigen Körperaxiome ebenfalls erfüllt sind. Für (A1) muss man beispielsweise acht verschiedene Fälle verifizieren. Im Laufe der linearen Algebra Vorlesung werden Sie sehen, dass die Definition der Addition und Multiplikation auf $\mathbb{F}_2$ nicht willkürlich sind, sondern sich ganz natürlich aus der Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ herleiten.[5]

(4) Es gibt noch sehr viele weitere Beispiele von Körpern, beispielsweise ist

$$K \;=\; \text{Menge der rationalen Funktionen} \;=\; \left\{ \frac{p(t)}{q(t)} \,\middle|\, p(t), q(t) \neq 0 \text{ Polynome in } t \right\}$$

[3] Warum ist (M3) erfüllt?

[4] In diesem Fall ist $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ die Menge bestehend aus $\{(N,N),(N,E),(E,N),(E,E)\}$. Eine Abbildung $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ ordnet also jedem Element in $\{(N,N),(N,E),(E,N),(E,E)\}$ entweder das Element E oder das Element N in $\mathbb{F}_2$ zu.

[5] Es stellt sich nun die Frage, ob man auf jeder Menge X geschickt eine Addition und Multiplikation definieren kann, so dass alle Axiome gelten. In der Algebravorlesung wird normalerweise gezeigt, dass man dies für eine endliche Menge durchführen kann, genau dann, wenn die Anzahl der Elemente in X eine Primpotenz ist, d.h. von der Form p^n wobei p eine Primzahl ist und $n \in \mathbb{N}$.

mit der üblichen Addition und Multiplikation ein Körper.[6]

1.2. **Folgerungen aus den Axiomen der Addition.** In diesem Kapitel beweisen wir verschiedene Aussagen, welche aus den Körperaxiomen folgen. Die Aussagen sind für $K = \mathbb{Q}$ aus der Schule vertraut. Indem wir diese jetzt direkt aus den Körperaxiomen herleiten, erhalten wir diese Aussagen für alle Körper, beispielsweise für den Körper $\mathbb{F}_2$.

Satz 1.1. (Eindeutigkeit des additiv neutralen Elements) *Sei K ein Körper. Dann existiert genau ein Element $k \in K$, so dass für alle $x \in K$ gilt*

$$x + k = x.$$

Beweis. [7]

> In der Universitätsmathematik muss jede Aussage bewiesen werden. Was heißt das in diesem Fall? Wir müssen nur aus der Voraussetzung zusammen mit elementarer Logik die gewünschten Aussagen herleiten. In diesem Fall dürfen wir also nur verwenden, dass K ein "Körper" ist, d.h. wir dürfen nur die Axiome (A1)–(A4) und (M1)–(M4) und (D) verwenden.

Die Aussage "es existiert *genau ein* Element mit einer Eigenschaft X" sind genau genommen zwei Aussagen auf einmal:

(1) Es gibt ein Element, welches die Eigenschaft X besitzt.
(2) Es gibt nicht mehr als ein Element, welches die Eigenschaft X besitzt. Mit anderen Worten, wenn zwei Elemente k und k' die Eigenschaft X besitzen, dann muss $k = k'$ gelten.

Wir müssen nun also beide Aussagen beweisen:

(1) Wegen Axiom (A3) wissen wir, dass es mindestens ein Element $k \in K$ gibt, nämlich $k = N$, so dass für alle $x \in K$ gilt $x + k = x$.
(2) Wir müssen nun noch zeigen, dass es nicht mehr als ein Element gibt, welches die Eigenschaft erfüllt. Es seien also k und k' zwei Elemente mit der genannten Eigenschaft, d.h. es gilt
    (a) $x + k = x$ für jedes $x \in K$,
    (b) $x + k' = x$ für jedes $x \in K$.
    Wir müssen zeigen, dass $k = k'$. In der Tat gilt

$$k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (b) angewandt auf } x=k}}{=} k + k' \overset{\substack{\text{Kommutativgesetz (A2)} \\ \downarrow}}{=} k' + k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (a) angewandt auf } x=k'}}{=} k'.$$

■

[6] Beispielsweise gilt in K, dass
$$\frac{1}{2+t} + \frac{2t^2-1}{3+t^2} = \frac{3+t^2+(2+t)(2t^2-1)}{(2+t)(3+t^2)} = \frac{2t^3+5t^2-t+1}{t^3+2t^2+3t+6}.$$
D.h. die Summe von zwei rationalen Funktionen ist wiederum eine rationale Funktion.

[7] Blauer, abgesetzter Text in einem Beweis ist nicht Teil des offiziellen Beweises, sondern der Versuch zu erklären, was die Problemstellung ist, und eventuell den Beweisansatz zu motivieren.

Definition. Es sei K ein Körper. Satz 1.1 besagt, dass es genau ein Element $k \in K$ gibt, so dass für alle $x \in K$ gilt $x + k = x$. Wir schreiben “0” für dieses Element und nennen es die *Null* des Körpers. Man beachte, dass für alle $x \in K$ aus dem Kommutativgesetz (A2) folgt, dass $0 + x = x + 0 = x$.

Satz 1.2. (Kürzungsregel der Addition) *Es sei K ein Körper und es seien $x, y \in K$. Wenn es ein $a \in K$ gibt, so dass $x + a = y + a$, dann gilt $x = y$.*

Beweis. Es sei K ein Körper und es seien $x, y, a \in K$ mit $x+a = y+a$. Wir müssen zeigen, dass $x = y$.

> Der Beweisansatz ist erstmal ganz einfach: wir fangen “links” mit x anfängt und versuchen geschickt umzuformen, so dass man am Ende bei y landet. Die Idee ist nun die Umformungen so vorzunehmen, so dass wir unsere Voraussetzung $x + a = y + a$ einbringen können.

Wir führen also folgende Rechnung durch:

$$\begin{aligned} x &\overset{\text{Eigenschaft der 0}}{=} x + 0 \underset{\text{nach Axiom (A4) gibt es ein } k \in K\text{, so dass } a+k=0}{=} x + (a + k) \overset{\text{Assoziativgesetz (A1)}}{=} (x + a) + k \underset{\text{nach Voraussetzung ist } x+a=y+a}{=} (y + a) + k \\ &\underset{\text{Assoziativgesetz (A1)}}{=} y + (a + k) \underset{\text{Wahl von } k}{=} y + 0 \underset{\text{Eigenschaft der 0}}{=} y. \end{aligned}$$

■

Satz 1.3. (Eindeutigkeit des additiven Inversen) *Sei K ein Körper und sei $x \in K$. Dann existiert genau ein Element $y \in K$, so dass*

$$x + y = 0.$$

Beweis. Sei $x \in K$. Wegen Axiom (A4) wissen wir, dass es ein Element $y \in K$ gibt mit $x+y = 0$. Wir müssen nun wiederum die Eindeutigkeit von y zeigen. Es seien also $y, y' \in K$ gegeben, mit $x + y = 0$ und $x + y' = 0$. Wir müssen zeigen, dass $y = y'$. Es gilt

$$y + x \underset{\text{Kommutativgesetz (A2)}}{=} x + y \underset{\text{Voraussetzung}}{=} 0 \underset{\text{Voraussetzung}}{=} x + y' \underset{\text{Kommutativgesetz (A2)}}{=} y' + x.$$

Es folgt nun aus Satz 1.2, dass $y = y'$. ■

Definition. Sei K ein Körper.

(1) Es sei $x \in K$. Nach Satz 1.3 existiert genau ein Element in K, welches zu x addiert null ergibt. Wir bezeichnen dieses Element mit “$-x$”, gesprochen *minus* x. Mit anderen Worten $-x$ ist das einzige Element in K mit $x + (-x) = 0$.

(2) Für $x, y \in K$ schreiben wir $x - y := x + (-y)$.

Satz 1.4. *Sei K ein Körper. Es gelten folgende Aussagen:*

$$\begin{array}{lrrcl} (1) & & -0 & = & 0. \\ (2) & \textit{Für alle } x \in K \textit{ gilt} & -(-x) & = & x. \\ (3) & \textit{Für alle } x, y \in K \textit{ gilt} & -(x+y) & = & -x-y. \end{array}$$

Beweis.

(1) Zur Erinnerung: für a und b in K gilt $-a = b$ genau dann, wenn $a + b = 0$. Wenn wir also zeigen wollen, dass $-0 = 0$, dann müssen wir zeigen, dass $0 + 0 = 0$. Aber dies folgt sofort aus der Eigenschaft der 0.

(2) Sei $x \in K$. Wir müssen zeigen, dass $-(-x) = x$. Wie in Teil (1) müssen wir also zeigen, dass $(-x) + x = 0$. Aber es gilt in der Tat, dass

$$(-x) + x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kommutativgesetz (A2)}}}{=} x + (-x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } -x.}}{=} 0.$$

(3) Der dritte Teil ist eine Übungsaufgabe im 1. Übungsblatt. ■

1.3. **Folgerungen aus den Axiomen der Multiplikation.** In diesem Teilkapitel behandeln wir nun die Axiome der Multiplikation. Die Axiome der Multiplikation sind ganz ähnlich zu den Axiomen der Addition. Beispielsweise gilt sowohl für Addition als auch für Multiplikation das Assoziativgesetz, das Kommutativgesetz und die Existenz eines neutralen Elements. Das Multiplikationsaxiom (M4) hingegen ist nicht mehr ganz analog zum Axiom (A4), denn in der Multiplikation fordern wir nicht mehr die Existenz eines inversen Elements für N. Die Symmetrie zwischen Addition und Multiplikation wird dann durch das Distributivgesetz völlig aufgebrochen.

Satz 1.5. (Eindeutigkeit des neutralen Elements der Multiplikation) *Es sei K ein Körper. Es existiert genau ein Element $k \in K$, so dass für alle $x \in K$ gilt*

$$x \cdot k = x.$$

Beweis. Der Beweis verläuft ganz analog zum Beweis von Satz 1.1. Man muss nur die Axiome der Addition (A2) und (A3) durch die entsprechenden Axiome der Multiplikation (M2) und (M3) ersetzen. ■

Definition. Es sei K ein Körper. Wir nennen das durch den obigen Satz eindeutig bestimmte Element die *Eins* des Körpers, welche wir mit "1" bezeichnen. Man beachte, dass für alle $x \in K$ wegen dem Kommutativgesetz (M2) gilt, dass $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

Satz 1.6. (Kürzungsregel der Multiplikation) *Sei K ein Körper und zudem seien $x, y \in K$. Wenn es ein $a \neq 0 \in K$ gibt, so dass $x \cdot a = y \cdot a$, dann gilt $x = y$.*

Beweis. Der Beweis ist ganz analog zum Beweis von Satz 1.2, wir müssen nur die Additionsaxiome (A1) und (A4) durch die Multiplikationsaxiome (M1) und (M4) ersetzen. ■

Satz 1.7. (Eindeutigkeit des multiplikativ Inversen) *Es sei K ein Körper und es sei $x \in K$ mit $x \neq 0$. Dann existiert genau ein Element $y \in K$, so dass*

$$x \cdot y = 1.$$

Beweis. Der folgende Satz wird ähnlich bewiesen wie Satz 1.3. ■

Definition. Es sei K ein Körper. Für $x \neq 0$ in K bezeichnen wir mit x^{-1}, gesprochen *x hoch minus eins*, das durch Satz 1.7 eindeutig bestimmte Element, welches $x \cdot x^{-1} = 1$ erfüllt.[8] Aus dem Kommutativgesetz (M2) folgt dann auch, dass $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$.

Satz 1.8. *Es sei K ein Körper. Es gelten folgende Aussagen:*

$$\begin{array}{llrcl} (1) & & 1^{-1} & = & 1. \\ (2) & \textit{Für alle } x \in K \setminus \{0\} \textit{ gilt} & (x^{-1})^{-1} & = & x. \\ (3) & \textit{Für alle } x, y \in K \setminus \{0\} \textit{ gilt} & (x \cdot y)^{-1} & = & x^{-1} \cdot y^{-1}. \end{array}$$

Beweis. Der Beweis verläuft ganz analog zum Beweis von Satz 1.4. ■

Satz 1.9. *Es sei K ein Körper. Für alle $x \in K$ gilt $x \cdot 0 = 0$.*

Beweis.

> Obwohl wir den Satz natürlich so erwarten, ist er doch etwas überraschend: Die 0 wurde definiert durch die Axiome der Addition. Aber der Satz macht eine Aussage über das multiplikative Verhalten der 0. Das einzige Axiom, welches die Addition mit der Multiplikation verbindet, ist das Distributivgesetz. Wir werden dieses dementsprechend im Beweis verwenden.

Es sei $x \in K$. Dann gilt

$$0 + x \cdot 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } 0}}{=} x \cdot 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } 0}}{=} x \cdot (0+0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Distributivgesetz (D)}}}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0.$$

Vergleichen wir nun die linke und die rechte Seite, so sehen wir, dass nun aus Satz 1.2 folgt, dass $0 = x \cdot 0$. ■

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Satz, in dem wiederum sowohl die Addition als auch die Multiplikation verwendet werden.

Satz 1.10. *Es sei K ein Körper. Für alle $x, y \in K$ gilt*

$$\begin{array}{lrcl} (1) & (-x) \cdot y & = & -(x \cdot y), \\ (2) & (-1) \cdot y & = & -y, \\ (3) & (-x) \cdot (-y) & = & x \cdot y. \end{array}$$

[8] Hierbei ist "x^{-1}" im Moment nur eine Notation und "x hoch minus eins" nur ein feststehender Begriff. Wir haben nicht eingeführt, was "x hoch irgendwas" heißen soll.

Beweis. Wir beweisen die Aussagen (1) und (3) in Übungsblatt 1. Aussage (2) folgt leicht mit $x = 1$ aus Aussage (1). ■

1.4. **Weitere Definitionen.**

Definition. Es sei K ein Körper.

(1) Für $a_1, \dots, a_s \in K$ definieren wir
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_s \;:=\; (\dots((a_1 + a_2) + a_3) + \dots) + a_s.$$
Es folgt aus dem Assoziativgesetz (A1), dass $a_1 + \cdots + a_s$ nicht von der Reihenfolge der Klammern abhängt.[9]Wir verwenden auch die übliche Summennotation, d.h. wir schreiben
$$\sum_{i=1}^{s} a_i \;:=\; a_1 + \cdots + a_s, \qquad\qquad \text{für } s = 0 \text{ definieren wir zudem } \sum_{i=1}^{s} a_i := 0.$$

(2) Für $x, y \in K$ schreiben wir ab sofort
$$xy \;:=\; x \cdot y.$$
Zudem, wenn $y \neq 0$, dann schreiben wir
$$\frac{x}{y} \;:=\; x/y \;:=\; xy^{-1}.$$
Für $a_1, \dots, a_s \in K$ definieren wir
$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_s \;:=\; (\dots((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot \dots) \cdot a_s.$$
Ganz analog zu oben folgt aus dem Assoziativgesetz (M1), dass $a_1 \cdot \dots \cdot a_s$ nicht von der Reihenfolge der Klammern abhängt. Wir verwenden zudem die übliche Produktnotation, d.h. wir schreiben
$$\prod_{i=1}^{s} a_i \;:=\; a_1 \cdot \dots \cdot a_s, \qquad\qquad \text{für } s = 0 \text{ definieren wir zudem } \prod_{i=1}^{s} a_i := 1.$$

Beispiel. Es sei K ein Körper und es seien $\{x_{ij}\}_{i=1,\dots,r,j=1,\dots,s}$ Elemente von K. Dann ist
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} x_{ij} \;&=\; \overbrace{\sum_{j=1}^{s} x_{1j}}^{\text{Summand für } i=1} \;+\; \overbrace{\sum_{j=1}^{s} x_{2j}}^{\text{Summand für } i=2} \;\cdots + \; \overbrace{\sum_{j=1}^{s} x_{rj}}^{\text{Summand für } i=r} \\ &=\; (x_{11} + \cdots + x_{1s}) + (x_{21} + \cdots + x_{2s}) + \cdots + (x_{r1} + \cdots + x_{rs}).\end{aligned}$$

Folgender Satz wird immer wieder verwendet ohne explizit erwähnt zu werden.

[9]Das Assoziativgesetz für $s = 4$ besagt beispielsweise, dass
$$((a_1 + a_2) + a_3) + a_4 = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) = a_1 + (a_2 + (a_3 + a_4)),$$
d.h. es ist völlig egal, wie wir die Klammern setzen. Wir können diese dementsprechend weglassen. Je nach Spitzfindigkeit des Mathematikers muss man wirklich noch beweisen, dass das Assoziativgesetz impliziert, dass man Klammern weglassen kann. Ein vollständiger Beweis ist gegeben in [DF, Seite 19].

Satz 1.11. *Es sei K ein Körper. Für $a_1, \ldots, a_r \in K$ und $b_1, \ldots, b_s \in K$ gilt*

$$\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{s} b_j\right) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_i \cdot b_j.$$

Beweis. Die Gleichheit folgt aus mehrfacher Anwendung des Distributivgesetzes. ■

Definition. Es sei K ein Körper. Für $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$x^n := \underbrace{x \cdot \cdots \cdot x}_{n-\text{Mal}}.$$

Zudem definieren wir $x^0 := 1$ (auch für $x = 0$!) und für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \neq 0$ definieren wir[10]

$$x^{-n} := 1/(x^n) = (x^n)^{-1}.$$

Wir bezeichnen x^n als x *hoch* n oder auch als n*-te Potenz von* x.

Der folgende Satz fasst einige elementare Eigenschaften von Potenzen zusammen.

Satz 1.12. *Es seien $x, y \in K$ mit $x, y \neq 0$ und es seien $m, n \in \mathbb{Z}$, dann gilt*

$$\begin{array}{lrcl} (1) & x^m \cdot x^n & = & x^{m+n} \\ (2) & (x^n)^m & = & x^{mn} \\ (3) & x^n y^n & = & (xy)^n. \end{array}$$

Beweisskizze. Die beiden ersten Aussagen folgen aus dem Assoziativgesetz (M1). Die dritte Aussage benötigt das Assoziativgesetz (M1) und auch das Kommutativgesetz (M2). ■

Wir haben in den letzten Kapiteln gesehen, dass für Körper die "üblichen" Rechen- und Umformungsregeln gelten. Im Folgenden werden wir nun die verwendeten Körperaxiome nicht mehr explizit aufführen und wir werden die obigen Sätze nicht mehr explizit zitieren. Zudem verwenden wir ab sofort die üblichen Rechenregeln, ohne diese im Einzelnen herzuleiten.

Bemerkung. Zum Abschluß der Diskussion der Körperaxiome, wollen wir noch kurz der Frage nachgehen, warum die Axiome so formuliert sind, wie sie sind. Beispielsweise hätten wir noch folgendes Axiom formulieren können

(A5) für alle $x, y, z \in K$ gilt, dass $x + (y + z) = y + (x + z)$.

Aber man kann sich leicht davon überzeugen, dass (A5) schon aus dem Assoziativgesetz und dem Kommutativgesetz folgt. Das Ziel ist, einen Körper über möglichst wenige Axiome zu charakterisieren, und dann ist (A5) überflüssig, nachdem es schon aus (A1) und (A2) folgt. Jetzt stellt sich die Frage, ob man nicht vielleicht eines der anderen Axiome weglassen könnte. Wir hatten gesehen, dass $\mathbb{Z}$ alle Axiome bis auf (M4) erfüllt. Nachdem (M4) jedoch

[10] Hier sieht man schön den Unterschied zwischen ":=" und "=". Wir verwenden ":=" für eine Definition und "=" für eine Gleichheit von gegebenen Objekten. Beispielsweise hatten wir für $x \neq 0$ schon $1/(x^n)$ und $(x^n)^{-1}$ eingeführt, und es gilt $1/(x^n) = (x^n)^{-1}$. Wir führen nun x^{-n} neu ein, in dem wir es als $x^{-n} := 1/(x^n)$ definieren.

nicht für $\mathbb{Z}$ gilt, kann (M4) nicht aus den anderen Axiomen folgen. Wir können Axiom (M4) also nicht weglassen.

Es ist eine amüsante Aufgabe, sich für jedes Axiom ein Beispiel zu überlegen, für welches alle anderen Axiome gelten, aber das gewählte Axiom gilt nicht. Beispielsweise gibt es auf $\mathbb{R}^4$ eine Multiplikation, welche zusammen mit der üblichen Addition auf $\mathbb{R}^4$ alle Körperaxiome bis auf (M2) erfüllt. Diese Struktur nennt man die Quaternionenmultiplikation, siehe [E, Kapitel 7.1] und

`http://de.wikipedia.org/wiki/Quaternion`.

1.5. **Angeordnete Körper.** Wir wollen uns an die Eigenschaften der rationalen und reellen Zahlen rantasten. Die rationalen und reellen Zahlen, wie wir sie aus der Schule kennen, besitzen neben der Addition und Multiplikation auch noch eine weitere Struktur, nämlich man kann zwei reelle Zahlen x, y "vergleichen", d.h. wir können davon reden, dass x "größer" als y ist. Dies führt uns nun zu folgender Definition.

Definition. Ein *angeordneter Körper* ist ein Körper K zusammen mit einer Relation[11] "$>$", welche folgende Ordnungsaxiome erfüllt:

(O1) Für alle $x, y \in K$ gilt *genau eine* der folgenden drei Aussagen:
$$x > y \quad \text{oder} \quad y > x \quad \text{oder} \quad x = y.$$
(O2) Für alle $x, y, z \in K$ gilt: $x > y$ und $y > z \implies x > z$ (Transitivität).
(O3) Für alle $x, y, a \in K$ gilt: $x > y \implies x + a > y + a$.
(O4) Für alle $x, y, a \in K$ gilt: $x > y$ und $a > 0 \implies x \cdot a > y \cdot a$.

Beispiel.

(1) Es sei $K = \mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen mit der üblichen Bedeutung von "$>$", dann ist $\mathbb{Q}$ ein angeordneter Körper.
(2) Hier ist ein etwas komplizierteres Beispiel von einem angeordneten Körper. Wie in Kapitel 1.1 sei K der Körper der rationalen Funktion, d.h.
$$K \;=\; \text{Menge der rationalen Funktionen} = \left\{ \frac{p(t)}{q(t)} \,\middle|\, p(t), q(t) \neq 0 \text{ Polynome in } t \right\}.$$
Für $f, g \in K$ schreiben wir dann
$$f > g \;:\Longleftrightarrow\; \text{Es existiert ein } \epsilon > 0, \text{ so dass } f(x) > g(x) \text{ für alle } x \in (0, \epsilon).$$
Beispielsweise gilt $\frac{x}{x+1} > x^3$, weil diese Ungleichheit gilt für alle $x \in (0, \frac{1}{2})$. Man kann nun zeigen, dass K mit dieser Ordnung $>$ in der Tat die Ordnungsaxiome (O1) bis (O4) erfüllt. Wir werden dieses Beispiel nicht weiter verfolgen.
(3) Es stellt sich nun die Frage, ob man nicht auch auf anderen Körpern eine Ordnung "$>$" einführen kann, welche die Axiome (O1) bis (O4) erfüllt. Beispielsweise, ist dies für den Körper $\mathbb{F}_2$ möglich? Wir werden diese Frage später noch beantworten.

[11] Strenggenommen ist eine *Relation* in K eine Teilmenge V von $K \times K$. Wir schreiben dann
$$a > b \text{ genau dann, wenn } (a, b) \in V.$$
Diese genaue Definition kann uns jetzt aber egal sein.

Definition. Es sei K ein angeordneter Körper. Für $x, y \in K$ definieren wir [12]

$$\begin{aligned} x < y &\;:\Leftrightarrow\; y > x,\\ x \geq y &\;:\Leftrightarrow\; x > y \text{ oder } x = y,\\ x \leq y &\;:\Leftrightarrow\; x < y \text{ oder } x = y,\end{aligned} \qquad \text{und für } x \in K \text{ definieren wir} \qquad \begin{aligned} x \text{ positiv} &\;:\Leftrightarrow\; x > 0,\\ x \text{ negativ} &\;:\Leftrightarrow\; x < 0.\end{aligned}$$

Der zweite Teil von folgendem Satz ist das Gegenstück zu (O4) für $a < 0$.

Satz 1.13. *Es sei K ein angeordneter Körper.*

(1) *Für alle $x \in K$ gilt:* $\quad x > 0 \iff -x < 0.$

(2) *Für alle $x, y, a \in K$ gilt:* $\quad x > y$ *und* $a < 0 \implies x \cdot a < y \cdot a.$

Bemerkung. Die Tatsache, dass die Implikation in (O4) nur gilt, wenn $a > 0$, gehört zu den größten Fehlerquellen der Analysis.

Beweis. Es sei K ein angeordneter Körper.

(1) Es sei $x \in K$. Dann gilt

$$x > 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ordnungsaxiom (O3)}}}{\iff} x + (-x) > 0 - x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } -x \text{ und } 0}}{\iff} 0 > -x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } < 0}}{\iff} -x < 0.$$

(2) Es seien also $x, y, a \in K$ mit $a < 0$. Dann gilt

$$x > y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{es folgt aus (1), mit } x = -a, \\ \text{dass } -a > 0, \text{ die Ungleichung} \\ \text{folgt nun aus (O4)}}}{\Rightarrow} x \cdot (-a) > y \cdot (-a) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (O3)}}}{\Rightarrow} x \cdot \overbrace{(-a) + xa + ya}^{=ya} > \overbrace{y \cdot (-a) + xa + ya}^{=xa} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt durch Vereinfachen}}}{\Rightarrow} ya > xa.$$

■

Satz 1.14. *Es sei K ein angeordneter Körper. Für jedes $x \in K$ mit $x \neq 0$ gilt*

$$x^2 \; > \; 0.$$

Beweis. Nachdem $x \neq 0$ folgt aus Axiom (O1), dass entweder $x > 0$ oder $0 > x$. Wir beweisen jetzt den Satz für die beiden Fälle getrennt.

1. Fall: $x > 0$. In diesem Fall gilt

$$x^2 = x \cdot x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus dem Ordnungsaxiom (O4), da } x > 0}}{>} 0 \cdot x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 1.9}}}{=} 0.$$

2. Fall: $0 > x$. Es sei also $0 > x$. Dann gilt

$$x^2 = x \cdot x \overset{\substack{\text{der Vollständigkeit halber, dies folgt aus Satz 1.10} \\ \downarrow}}{=} (-x) \cdot (-x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aus Satz 1.13 folgt, dass } -x > 0, \text{ also folgt die Ungleichung aus dem 1. Fall}}}{>} 0.$$

■

[12] Die Notation $:\Leftrightarrow$ bedeutet hierbei, dass die linke Seite durch die rechte Seite definiert wird. Beispielsweise bedeutet $x < y :\Leftrightarrow y > x$, dass wir genau dann $x < y$ schreiben, wenn $y > x$.

Korollar 1.15. *Es sei K ein angeordneter Körper. Für jedes $x \in K$ mit $x>0$ gilt $\frac{1}{x} > 0$.*

Beweis. Es sei $x \in K$ mit $x > 0$. Es gilt

$$\frac{1}{x} = x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } x>0 \text{ und da nach Satz 1.14 gilt } \left(\frac{1}{x}\right)^2 > 0 \\ \text{erhalten wir die Ungleichung aus dem Ordnungsaxiom (O4)}}}{>} 0 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 0.$$

■

Korollar 1.16. *In jedem angeordneten Körper gilt:* $1 > 0$.

Beweis. Es ist

$$1 = 1 \cdot 1 = 1^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 1.14}}}{>} 0.$$

■

Satz 1.17. *Sei K ein angeordneter Körper.*

(1) *Für alle $a, b, c, d \in K$ gilt:* $a > b$ *und* $c > d \implies a + c > b + d.$

(2) *Für alle $a, b \in K$ gilt:* $a > b > 0 \implies \frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0$

(3) *Für alle $a, b, c, d \in K$ gilt:* $a > b > 0$ *und* $c > d > 0 \implies a \cdot c > b \cdot d.$

Beweis. Der Satz wird in Übungsblatt 1 bewiesen. ■

Korollar 1.18. *Es sei K ein angeordneter Körper. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n-\text{Mal}} > 0, \quad \textit{insbesondere gilt} \quad \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n-\text{Mal}} \neq 0.$$

Beweis.

(a) Nach Korollar 1.16 wissen wir, dass $1 > 0$.
(b) Wenn wir Satz 1.17 auf $1 > 0$ und $1 > 0$, erhalten wir $1 + 1 > 0$.
(c) Aus $1 > 0$ und $1 + 1 > 0$ erhalten wir mithilfe von Satz 1.17, dass $1 + 1 + 1 > 0$.
(d) Indem wir so fortfahren erhalten wir die erste Aussage.
(e) Die zweite Aussage folgt nun sofort aus (O1). ■

Bemerkung. In dem Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen gilt $1 + 1 = 0$. Das Korollar 1.18 besagt also insbesondere, dass der Körper $\mathbb{F}_2$ kein angeordneter Körper sein kann, d.h. man kann auf $\mathbb{F}_2$ keine Ordnung "$>$" definieren, welche alle Axiome (O1) bis (O4) erfüllt. Das gleiche Argument zeigt auch noch eine stärkere Aussage: ein angeordneter Körper ist immer unendlich.

Definition. Es sei K ein angeordneter Körper und $x \in K$. Wir definieren den *Absolutbetrag von x* als

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Satz 1.19. *Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $x, y \in K$, dann gilt:*

$$\begin{array}{llcl}
(1) & |x| & \geq & 0, \\
(2) & |x| = 0 & \Leftrightarrow & x = 0, \\
(3) & |-x| & = & |x| \\
(4) & |x \cdot y| & = & |x| \cdot |y|, \\
(5) & |x+y| & \leq & |x| + |y| \quad (\textit{Dreiecksungleichung}).
\end{array}$$

Beweis $(*)$. [13]

(1) Die Aussage folgt aus einer Fallunterscheidung und Satz 1.13.
(2) Die Aussage folgt aus dem Ordnungsaxiom (O1).
(3) Die Aussage folgt sofort aus den Definitionen.
(4) Wir schreiben $x = \sigma \cdot x_0$ mit $x_0 \geq 0$ und $\sigma \in \{\pm 1\}$ und $y = \tau \cdot x_0$ mit $y_0 \geq 0$ und $\tau \in \{\pm 1\}$. Dann ist

$$|xy| \;=\; |\sigma \cdot \tau \cdot x_0 \cdot y_0| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (3), denn } \sigma\cdot\tau \in \{-1,1\}}}{=} |x_0 \cdot y_0| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aus } x_0 > 0 \text{ \& } y_0 > 0 \\ \text{und (O4) folgt } x_0 \cdot y_0 > 0}}{=} x_0 \cdot y_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } x_0 = |x| \text{ und } y_0 = |y|}}{=} |x| \cdot |y|.$$

(5) Es ist

$$x + y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dies folgt aus Satz 1.17,} \\ \text{denn } x \leq |x| \text{ und } y \leq |y|}}{\leq} |x| + |y| \quad \text{und} \quad -(x+y) = -x - y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dies folgt aus Satz 1.17,} \\ \text{denn } -x \leq |x| \text{ und } -y \leq |y|}}{\leq} |x| + |y|.$$

Per Definition von $|-|$ gilt $|x+y| = x+y$ oder $|x+y| = -(x+y)$ erhalten wir aus den beiden Ungleichungen die gewünschte Ungleichung $|x+y| \leq |x| + |y|$. ■

Wir haben uns jetzt davon überzeugt, dass in einem angeordneten Körper die üblichen Regeln für $>$ gelten. Wie bei den Körperaxiomen werden wir daher im Folgenden auch die Ordnungsaxiome (O1) bis (O4) nicht mehr explizit angeben, und wir werden auch nicht mehr explizit auf die Sätze in diesem Kapitel verweisen.

1.6. **Der Satz über die reellen Zahlen.**

Definition. Sei K ein Körper, $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren[14]

$$n \cdot x \;:=\; \underbrace{x + \cdots + x}_{n-\text{Mal}}.$$

Beispielsweise gilt für $E \in \mathbb{F}_2 = \{N, E\}$ und $n = 3$, dass $3 \cdot E = E + E + E = N + E = E$.

[13]Wenn ein Beweis mit $*$ markiert ist, dann bedeutet dies, dass wir den Beweis nicht in der Vorlesung behandelt haben und dieser auch nicht Teil des Stoffes ist. Meistens handelt es sich um Beweise, welche nicht besonders interessant sind. Man darf diese Beweise gerne lesen, es gibt aber keinerlei Verpflichtung. Die Beweise fehlen in der Kurzversion des Skripts.

Wir führen nun noch ein 5. Ordnungsaxiom ein, welches auf den ersten Blick etwas eigenwillig ist.

Definition. Wir sagen ein angeordneter Körper erfüllt *das archimedische Axiom*, wenn gilt

(N) für alle $x > 0$ und $y > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$n \cdot x > y.$$

Bemerkung. Das archimedische Axiom ist "so offensichtlich richtig" für $K = \mathbb{Q}$, dass man sich kaum vorstellen kann, dass es nicht immer erfüllt ist. Wenn wir aber zum vorerst letzten Mal den Körper K der rationalen Funktionen mit der auf Seite 14 definierten Ordnung "$>$" betrachten, dann sehen wir, dass "$>$" alle Axiome (O1) bis (O4) erfüllt. Aber "$>$" erfüllt nicht das archimedische Axiom. In der Tat, für die rationalen Funktionen $p = 1$ und $q = x$ gilt[15] $1 > x$, aber es gilt auch für alle $n \in \mathbb{N}$, dass[16] $1 > n \cdot x$.

Bemerkung. Man kann das archimedische Axiom beispielsweise für $K = \mathbb{Q}$ wie in Abbildung 1 veranschaulichen. Wenn wir eine Strecke der Länge $x > 0$ gegeben haben, und einen Punkt y auf dem Strahl, dann kann man den Punkt y übertreffen, indem man die Strecke der Länge x genügend oft abträgt.

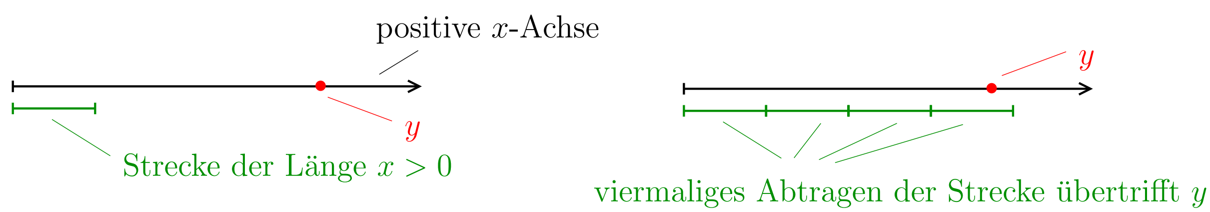


ABBILDUNG 1. Veranschaulichung des archimedischen Axioms.

Wir führen nun noch ein letztes Ordnungsaxiom ein, nämlich das Vollständigkeitsaxiom.

Definition. Ein angeordneter Körper heißt *vollständig*, wenn das Vollständigkeitsaxiom gilt:

(V) Jede Cauchy-Folge in K konvergiert.

Die Definitionen von "Cauchy-Folge" und "Konvergenz einer Cauchy-Folge" werden in Kapitel 4 nachgereicht. Wir werden dann auch sehen, dass $\mathbb{Q}$ das Vollständigkeitsaxiom *nicht* erfüllt. Mit diesen Definitionen können wir aber nun folgenden Satz formulieren:

Satz 1.20. (Existenz und Eindeutigkeit der reellen Zahlen *Es gibt* (*bis auf einen eindeutig bestimmten Isomorphismus*)[17]*genau einen angeordneten Körper, welcher das archimedische Axiom erfüllt und welcher vollständig ist.*

---

[14]Man könnte denken, dass es da doch nichts zu definieren gibt, weil wir doch schon eine Multiplikation auf dem Körper besitzen. Aber diese gibt uns nur das Produkt von zwei Elementen des Körpers K, es gibt uns nicht das Produkt einer natürlichen Zahl n mit einem Element k aus K.

[15]In der Tat, denn für $x \in (0,1)$ gilt, dass $1 > x$.

[16]In der Tat, denn für $x \in (0, \frac{1}{n})$ gilt, dass $1 > nx$.

Beweisskizze $(*)$. Es gibt verschiedene Methoden den Satz zu beweisen. Wir skizzieren eine Möglichkeit. Ein Dedekindschnitt ist ein Paar (U, V) von Teilmengen von $\mathbb{Q}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) U und V sind nicht leer.
(2) Es ist $U \cup V = \mathbb{Q}$.
(3) Für jedes $x \in U$ und $y \in V$ gilt $x < y$.
(4) V besitzt kein minimales Element, d.h. es gibt kein $y \in V$, so dass $y \leq z$ für alle $z \in V$.

Wir bezeichnen mit K die Menge alle Dedekindschnitte. Wir führen folgende Definitionen durch:

(1) Für $(U_1, V_1), (U_2, V_2) \in K$ definieren wir
$$(U_1, V_1) + (U_2, V_2) \ := \ (\{x_1 + x_2 \mid x_1 \in U_1, x_2 \in U_2\}, \{y_1 + y_2 \mid y_1 \in V_1, y_2 \in V_2\}).$$
(2) Man kann relativ leicht zeigen, dass $(K, +)$ die Axiome (A1) bis (A4) erfüllt mit $0 = (\{x \in \mathbb{Q} \,|\, x \leq 0\}, \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x > 0\})$.
(3) Wir schreiben $(U_1, V_1) < (U_2, V_2)$, wenn $U_1 \subset U_2$ und $U_1 \subsetneq U_2$.
(4) Für $(U_1, V_1), (U_2, V_2) \in K$ mit $(U_1, V_1) > 0$ und $(U_2, V_2) > 0$, definieren wir
$$(U_1, V_1) \cdot (U_2, V_2) \ := \ (\{x_1 \cdot x_2 \mid x_1 \in U_1, x_2 \in U_2\}, \{y_1 \cdot y_2 \mid y_1 \in V_1, y_2 \in V_2\}).$$
Die Multiplikation in den anderen Fällen ist etwas aufwändiger zu definieren, siehe [E, S. 32].

In [L] und [E, Kapitel 1.4] wird nun gezeigt, dass alle Axiome erfüllt sind. Die Existenz von einem solchen Körper wird in [E, Kapitel 1.2-1.3] auch durch zwei weitere Methoden bewiesen. Die Eindeutigkeit wird auf [E, p. 42] bewiesen. ■

Definition. Wir nennen den durch den Satz eindeutig bestimmten Körper den Körper der reellen Zahlen und bezeichnen ihn mit $\mathbb{R}$.

Dieser Körper der reellen Zahlen ist natürlich nichts anderes als die reellen Zahlen, welche Sie schon aus der Schule kennen. Allerdings werden diese in der Schule in der Regel etwas schwammig definiert ("Zahlen mit unendlich vielen Ziffern hinter dem Komma"). Wir werden in der Vorlesung nur verwenden, dass die reellen Zahlen die Körperaxiome (A1)–(A4), (M1)–(M4) und (D), sowie die Ordnungsaxiome (O1)–(O4), das archimedische Axiom (N) und das mysteriöse Vollständigkeitsaxiom (V) erfüllen. Wir werden aus diesen Axiomen alle weiteren Aussagen herleiten.

---

[17] Den Ausdruck "bis auf einen eindeutig bestimmten Isomorphismus" können Sie erst einmal ignorieren. Der vollständigkeit halber ist hier noch die Definition: Ein Isomorphismus $f\colon K \to K'$ zwischen zwei angeordneten Körper K und K' ist eine bijektive Abbildung $f\colon K \to K'$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für alle $x, y \in K$ ist $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
(2) Für alle $x, y \in K$ ist $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$.
(3) Für alle $x, y \in K$ gilt $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

Der Satz besagt also, dass wenn K und K' zwei vollständige angeordnete Körper sind, dann gibt es genau einen Isomorphismus $f\colon K \to K'$.

1.7. **Reelle Zahlen und natürliche Zahlen.** Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen den natürlichen Zahlen, und den abstrakt eingeführten reellen Zahlen klären. Dazu benötigen wir noch folgende Definition.

Satz 1.21. *Es bezeichne* 1 *das Eins-Element des Körpers* $\mathbb{R}$. *Wir betrachten die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \underbrace{1+\dots+1}_{n-\text{Mal}} = n \cdot 1. \end{array}$$

Für $a_1, a_2 \in \mathbb{N}_0$ *mit* $a_1 \neq a_2$ *gilt auch* $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$.[18]

Beweis. Es sei $a_1, a_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $a_1 \neq a_2$. Nach (O1) gilt also entweder $a_1 > a_2$ oder $a_2 > a_1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) können wir annehmen, dass $a_1 > a_2$. (Andernfalls gilt eben $a_2 > a_1$ und der folgende Beweis funktioniert genauso, nur mit den Rollen von a_1 und a_2 vertauscht.) Es folgt, dass ein $x \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $a_1 = a_2 + x$. Daraus wiederum folgt, dass

$$\varphi(a_1) \;=\; \varphi(a_2+x) = \underbrace{1+\ldots+1}_{(a_2+x)-\text{Mal}} \;=\; \underbrace{1+\ldots+1}_{a_2-\text{Mal}} + \underbrace{1+\ldots+1}_{x-\text{Mal}} \;=\; \varphi(a_2) + \overbrace{1+\ldots+1}^{>0 \text{ nach Korollar 1.18}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus } \varphi(x)>0 \text{ und dem Ordnungsaxiom (O3)}}}{>} \varphi(a_2).$$

Wir haben also gezeigt, dass $\varphi(a_1) > \varphi(a_2)$. Es folgt nun aus (O1), dass $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$. ■

Es folgt aus Satz 1.21, dass wir $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\varphi(n) \in \mathbb{R}$ gleichsetzen können. Wir fassen daher von nun an $\mathbb{N}_0$ als Teilmenge der reellen Zahlen auf. Wir führen zudem folgende Definitionen ein:

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{Z} & = & \mathbb{N}_0 \cup \{-n \in \mathbb{R} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \quad \subset \mathbb{R} & \text{(die Menge der ganzen Zahlen),} \\ \mathbb{Q} & = & \{\frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{Z} \text{ mit } q \neq 0\} \quad \subset \mathbb{R} & \text{(der Körper der rationalen Zahlen).} \end{array}$$

Wir beschließen das Teilkapitel mit folgendem Satz. Dieser erscheint "ganz offensichtlich', aber wir wollen diesen wiederum nur aus den Axiomen herleiten.

Satz 1.22. *Für jedes* $\epsilon > 0$ *in* $\mathbb{R}$ *existiert ein* $n \in \mathbb{N}$, *so dass*

$$\frac{1}{n} \;<\; \epsilon.$$

Beweis. Es sei also $\epsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\frac{1}{n} < \epsilon$.

Wir müssen also zeigen, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, welches eine gewisse Ungleichung erfüllt. Das einzige Axiom, und die einzige Aussage, welche wir von diesem Typ haben, ist das archimedische Axiom:
(N) Für alle $x > 0$ und $y > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n \cdot x > y$.
Wir müssen also das archimedische Axiom auf geschickt gewählte x und y anwenden.

[18] Eine Abbildung $\varphi\colon A \to B$ zwischen zwei Mengen bei der gilt, dass aus $a_1 \neq a_2$ immer folgt, dass $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$, heißt *injektiv*. Wir werden diesen Begriff später noch ausführlicher diskutieren. Der Begriff wird auch in der linearen Algebra verwendet.

Aus Korollar 1.15 folgt, dass $\frac{1}{\epsilon} > 0$. Nach dem archimedischen Axiom (N), angewandt auf $x = \epsilon$ und $y = 1$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n \cdot \epsilon > 1$, also $n > \frac{1}{\epsilon}$. Es folgt nun aus Satz 1.17, dass $\frac{1}{n} < \epsilon$. ■

1.8. **Notationen.** Wir führen noch einige Notationen ein. Die meisten davon sind wohl aus der Schule geläufig.

Notation. Im Folgenden seien a, b zwei reelle Zahlen gegeben, wir definieren: [19][20]

$$\begin{array}{rcll} [a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}, & \text{(geschlossenes Intervall)} \\ (a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}, & \text{(offenes Intervall)} \\ (a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}, & \text{(halboffenes Intervall)} \\ [a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}, & \text{(halboffenes Intervall)} \end{array}$$

Eckige Klammern [und] bedeuten also, dass der Endpunkt enthalten ist, runde Klammern (und) bedeuten, dass der Endpunkt nicht enthalten ist. Die Notation unterscheidet sich also von der an der Schule geläufigen Notation, dort wir beispielsweise das offene Intervall (a, b) oft als $]a, b[$ geschrieben. Darüber hinaus definieren wir

$$\begin{array}{rcll} [a,\infty) & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x\} & \\ (a,\infty) & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\} & \\ (-\infty,a] & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a\} & \\ (-\infty,a) & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\} & \\ \mathbb{R}_{>0} & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\} & \text{(die Menge der positiven reellen Zahlen)} \\ \mathbb{R}_{\geq 0} & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\} & \text{(die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen)} \end{array}$$

Notation. Für eine *endliche* Menge $M \subset \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\max M$ das maximale Element von M und wir bezeichnen mit $\min M$ das minimal Element von M

Beispiel. Es ist $\max\{1, -5, 7\} = 7$ und $\min\{-\frac{1}{2}, 3, -3\} = -3$.

Zum Abschluß wollen wir noch den Begriff des ab- und aufrundens einführen. Dazu benötigen wir folgendes Lemma.[21]

Lemma 1.23.

(1) *Für jede reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ existiert ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $m > r$.*
(2) *Für jede reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < s$.*

---

[20]Hierbei bezeichnet beispielsweise $\{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$ die Menge aller reellen Zahlen, welche die Eigenschaft besitzen, dass $a \leq x \leq b$.

[20]Wir erlauben auch explizit den Fall, dass $a > b$. Beispielsweise ist $(3, -2)$ die leere Menge, weil es keine reelle Zahl x gibt mit $x > 3$ und $x < -2$.

[21]Ein "Lemma" ist, wie ein "Satz" oder "Theorem" eine mathematische Aussage. Der Name "Lemma" wird normalerweise für etwas uninteressantere Aussagen verwendet. Aber das ist reine Geschmackssache. Ich hätte die Aussage auch wieder als Satz bezeichnen können.

Beweis $(*)$.

(1) Die Aussage folgt aus dem archimedischen Axiom angewandt auf $x = 1$ und $y = r$.
(2) Wir wenden (1) auf $r = -s$ und erhalten ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $m > -s$. Dann gilt aber $-m < -(-s) = s$. Also hat $n := -m$ die gewünschte Eigenschaft. ■

Definition. Für eine reelle Zahl $z \in \mathbb{R}$ definieren wir[22]

$$\begin{array}{lclcll} \lceil z \rceil & := & \min\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \geq z\} & = & \text{minimales } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } n \geq z & \text{“}z \text{ aufgerundet”, sowie} \\ \lfloor z \rfloor & := & \max\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq z\} & = & \text{maximales } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } n \leq z & \text{“}z \text{ abgerundet”.} \end{array}$$

Die kleinen horizontalen Striche geben also an, ob man ab- oder aufrundet.

[22] Es folgt aus Lemma 1.23, dass es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq z$ gibt. Deswegen ist $\lceil x \rceil$ in der Tat definiert. Das gleiche Argument gilt auch für $\lfloor x \rfloor$.

2. Die vollständige Induktion

Im nächsten Kapitel führen wir Folgen von reellen Zahlen und die Konvergenz von reellen Folgen ein. In diesem Kapitel unterbrechen kurzzeitig die Diskussion der reellen Zahlen, und führen die vollständige Induktion als Beweismethode ein. Wir verwenden diese um mehrere Aussagen herzuleiten, welche in späteren Kapiteln hilfreich sein werden.

Das ganze Kapitel beruht auf folgendem, eigentlich offensichtlichen Satz, aus der Logik.

Satz 2.1. (Prinzip der vollständigen Induktion) *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Nehmen wir an, dass Folgendes gilt:*

(1) *$A(0)$ ist wahr,*
(2) *für jedes beliebige $n \geq 0$ gilt: Falls $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr.*

Dann folgt aus (1) und wiederholter Anwendung von (2), dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Ein typischer Induktionsbeweis verläuft nun wie folgt. Wir wollen zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine bestimmte Aussage $A(n)$ gilt. Wir führen folgende drei Schritte durch:

(1) Induktionsanfang: Man zeigt, dass $A(0)$ gilt.
(2) Induktionsvoraussetzung: Man nimmt an, dass $A(n)$ gilt für ein beliebiges $n \geq 0$.
(3) Induktionsschritt: Man zeigt, dass unter der Induktionsvoraussetzung auch $A(n+1)$ wahr ist.

Es folgt nun aus dem Prinzip der vollständigen Induktion, d.h. aus Satz 2.1, dass die Aussage $A(n)$ wahr ist für alle n.

Wir werden jetzt eine ganze Reihe von Sätzen mithilfe von Induktion beweisen. Wir beginnen mit folgendem Satz, den wir in Zukunft immer mal wieder verwenden werden.

Satz 2.2. *Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \;=\; \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Beweis. Es sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$A(n) \text{ definiert als folgende Aussage} \qquad \sum_{k=0}^{n} x^k \;=\; \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Wir müssen zeigen, dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \geq 0$.
Induktionsanfang. Wir müssen also zeigen, dass die Aussage $A(0)$ wahr ist. Dies können wir leicht verifizieren, denn es ist

$$\sum_{k=0}^{0} x^k \;=\; x^0 \;=\; 1 \;=\; \frac{1-x}{1-x},$$

d.h. $A(0)$ ist wahr.

Induktionsvoraussetzung. Wir nehmen an, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ wahr ist, d.h. wir nehmen an, dass

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Induktionsschritt. Wir müssen nun zeigen, dass auch $A(n+1)$ wahr ist.

> Wir müssen also $\sum_{k=0}^{n+1} x^k$ bestimmen. Die Idee ist nun, diese Summe aufzuspalten, in die ersten n Summanden und den letzten Summanden. Die Summe der ersten n Summanden kennen wir schon per Induktionsvoraussetzung.

Wir führen nun folgende Berechnung durch:

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Verwenden der Induktionsvoraussetzung}}}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Zusammenfassen}}}{=} \frac{(1-x^{n+1})+(1-x)x^{n+1}}{1-x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vereinfachen}}}{=} \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.$$

Nach Induktion folgt nun, dass $A(n)$ wahr ist für alle n, d.h. wir haben den Satz bewiesen. ∎

Satz 2.3. (Satz vom kleinen Gauss) *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) \qquad \textit{und} \qquad (2) \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Beweis $(*)$. Man kann Aussage (1) problemlos per Induktion beweisen. Ein anderer Ansatz ist die Aussage mithilfe des “Tricks vom kleinen Gauss” zu zeigen. Dies ist eine Aufgabe im 2. Präsenzübungsblatt.

Wir wollen im Folgenden nun Aussage (2) beweisen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei nun $A(n)$ die Aussage

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1).$$

Wir müssen also zeigen, dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Induktionsanfang. Wir können leicht verifizieren, dass die Aussage $A(0)$ richtig ist. In der Tat ist

$$\sum_{k=1}^{0} k^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{siehe Definition auf Seite 12}}}{=} 0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot (0+1) \cdot (2 \cdot 0 + 1).$$

Induktionsvoraussetzung. Wir nehmen nun an, dass $A(n)$ wahr ist für ein $n \in \mathbb{N}_0$, d.h. wir nehmen an, dass für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Induktionsschritt. Wir müssen nun zeigen, dass auch $A(n+1)$ wahr ist. Wir verfahren ganz analog zum Beweis von Satz 2.2, nämlich wir führen folgende Rechnung durch:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \;=\; \sum_{k=1}^{n} k^2 \;+\; (n+1)^2 \;&\overset{\substack{\text{folgt aus der Induktionsvoraussetzung}\\ \downarrow}}{=}\; \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \;+\; (n+1)^2 \\ &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt durch Ausmultiplizieren auf beiden Seiten und Vergleichen der Terme}}}{=}\; \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1).\end{aligned}$$

■

Bemerkung. In Beweisen wird die Induktionsvoraussetzung oft ausgelassen, allerdings empfehle ich diese am Anfang immer noch aufzuführen, weil es im Induktionsschritt hilfreich ist, diese vor Augen zu haben.

Satz 2.4. (Bernoullische Ungleichung). *Es sei $x \geq -1$ eine reelle Zahl. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt folgende Ungleichung:*

$$(1+x)^n \;\geq\; 1+nx.$$

Beweis. Es sei $x \geq -1$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $A(n)$ die Aussage, dass

$$(1+x)^n \;\geq\; 1+nx.$$

Induktionsanfang. Man kann leicht nachrechnen, dass die Aussage $A(0)$ wahr ist.
Induktionsvoraussetzung. Wir nehmen an, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ wahr ist, d.h. wir nehmen an, dass für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(1+x)^n \;\geq\; 1+nx.$$

Induktionsschritt. Es gilt

$$(1+x)^{n+1} \;=\; (1+x)^n \cdot (1+x) \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{aus der Induktionsvoraussetzung folgt } (1+x)^n \geq 1+nx \text{, die Ungleichung folgt}\\ \text{nun aus dem Ordnungsaxiom (O4) und der Voraussetzung, dass } 1+x\geq 0}}{\geq}\; (1+nx)(1+x) \;=\; 1+(n+1)x+nx^2 \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } nx^2 \geq 0}}{\geq}\; 1+(n+1)x.$$

■

Das folgende Korollar besagt insbesondere, dass die Potenzen von einer Zahl $b > 1$ "beliebig groß" werden können.

Korollar 2.5. *Es sei $b > 1$. Für jedes $C \in \mathbb{R}$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $b^n > C$.*

Beispiel. Wir wollen die Zahl der Viruserkrankten mit folgendem grob vereinfachten Modell studieren:

(1) Wir nehmen an, dass es zu Beginn der ersten Woche genau $m > 0$ Infizierte gibt.
(2) Jeder Infizierte bleibt eine Woche lang krank und ansteckend und ist danach nicht mehr krank und nicht mehr ansteckend.

(3) Wir nehmen an, dass jeder Virusinfizierte innerhalb von einer Woche im Durchschnitt wiederum R Menschen ansteckt. Am Ende der ersten Woche sind also $R \cdot m$ Menschen krank. Am Ende der zweiten Woche sind dann $R^2 \cdot m$ krank und am Ende der n-ten Woche sind $R^n \cdot m$-Menschen krank.[23]
(4) Nehmen wir an, dass der Anteil derer, die auf einer Intensivstation behandelt werden müssen, $\epsilon \in (0, 1]$ ist. Mit anderen Worten, in Woche n liegen $\epsilon \cdot R^n \cdot m$ Patienten auf der Intensivstation.
(5) Es sei J die Anzahl der Behandlungsplätze auf Intensivstation.
(6) Wir nehmen nun an, dass $R > 1$. Korollar 2.5 besagt dann, dass es eine Woche $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $R^n > \frac{J}{\epsilon \cdot m}$ für alle $n \geq n_0$, d.h. es ist $\epsilon \cdot R^n \cdot m > J$ für alle $n \geq n_0$. Mit anderen Worten, ab der n_0-ten Woche sind alle Intensivplätze durchgehend belegt.

Beweis. Es sei $b > 1$ und es sei $C \in \mathbb{R}$.

Wir wollen also insbesondere ein $n \in \mathbb{N}_0$ finden, so dass die Potenz b^n größer als die gegebene Zahl C wird. Das klingt ein bisschen wie das archimedische Axiom, allerdings behandelt dies ein Produkt nx und keine Potenz. Andererseits können wir mithilfe der Bernoullischen Ungleichung eine Potenz durch einen Ausdruck der Form $1 + nx$ abschätzen. Die Idee des Beweises ist also, das Korollar mithilfe der Bernoullischen Ungleichung auf das archimedische Axiom zurück zu führen.

Wir müssen den Ausdruck b^n in die Form $(1 + x)^n$ bringen. Wir setzen daher $x = b - 1$. Es folgt aus Satz 2.4, dass für ein beliebiges n gilt:

$$b^n \;=\; (1 + x)^n \;\geq\; 1 + nx.$$

Nachdem $x = b - 1 > 0$ besagt das archimedischen Axiom, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$n_0 \cdot x \;\geq\; C$$

gibt. Fassen wir beides zusammen, dann erhalten wir für $n \geq n_0$, dass

$$b^n \;=\; (1+x)^n \underset{\substack{\uparrow\\ \text{aus } b>1 \text{ folgt } x>0\text{, also folgt}\\ \text{die Ungleichung aus der}\\ \text{Bernoullischen Ungleichung}}}{\geq} 1 + n \cdot x \underset{\substack{\uparrow\\ \text{da } 1>0}}{>} n \cdot x \underset{\substack{\uparrow\\ \text{da } n \geq n_0\\ \text{und } x>0}}{\geq} n_0 \cdot x \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Wahl von } n_0}}{\geq} C.$$

■

Wir beschließen das Kapitel mit ein paar Definitionen und Aussagen, welche vielleicht schon aus der Schule bekannt sind.

Definition. Für $n_0 \in \mathbb{N}$ definieren wir $$n! \;:=\; \prod_{k=1}^{n} k \qquad \text{gesprochen „}n\text{ Fakultät“}.$$

Aus der Definition auf Seite 12 folgt, dass $0! := 1$. Für $0 \leq k \leq n$ in $\mathbb{N}_0$ definieren wir außerdem den *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} \;:=\; \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \qquad \text{gesprochen „}k\text{ aus }n\text{“}$$

[23] R ist also grob der Reproduktionsfaktor.

Für $k = 0$ oder $k = n$ beträgt dieser Ausdruck gerade 1.

Lemma 2.6. *Für $0 \leq k \leq n$ gilt*

$$\binom{n+1}{k} \;=\; \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Beweis (∗). Es ist

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!\;k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!\;(k-1)!} \\
&= \frac{(n+1-k)\;n!}{(n+1-k)(n-k)!\;k!} + \frac{n!\;k}{(n-k+1)!\;(k-1)!k} \\
&= \frac{(n+1-k)\,n!}{(n+1-k)!\;k!} + \frac{n!\,k}{(n-k+1)!\;k!} \\
&= ((n+1-k)+k)\frac{n!}{(n+1-k)!\;k!} \;=\; \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\;k!} \;=\; \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

■

Mithilfe von diesem Lemma können wir jetzt folgenden Satz beweisen.

Satz 2.7. (Binomischer Lehrsatz) *Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beispiel. Der Satz kann als Verallgemeinerung der üblichen binomischen Formel betrachtet werden. In der Tat besagt der Satz für $n = 2$, dass

$$(a+b)^2 \;=\; \binom{2}{0}a^0b^2 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^2b^0 \;=\; b^2 + 2ab + a^2.$$

Für $n = 3$ sieht man zudem, dass

$$(a+b)^3 \;=\; \binom{3}{0}a^0b^3 + \binom{3}{1}a^1b^2 + \binom{3}{2}a^2b^3 + \binom{3}{3}a^3b^0 \;=\; b^3 + 3ab^2 + 3a^2b + a^3.$$

Beweis (∗). Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $A(n)$ die Aussage:

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Induktionsanfang. Die Aussage $A(0)$ gilt trivialerweise.[24]
Induktionsvoraussetzung. Wir nehmen an, dass $A(n)$ wahr ist, d.h. wir nehmen an, dass

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

[24]Hier "trivial" heißt, dass man es leicht durch Einsetzen zeigen kann. Das Ganze ist so langweilig, dass man es sich sparen kann, dazu etwas zu schreiben.

Induktionsschritt. Wir führen folgende Rechnung durch:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Induktionsvoraussetzung}}}{=} (a+b)\cdot \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Distributivgesetz}}}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}.$$

Wir wenden jetzt den Trick an, dass wir eine Summe wie folgt ganz allgemein umschreiben können:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n+1} c_{k-1}.$$

Wir wenden jetzt diesen Trick auf die erste Summe an. Wir rechnen nun wie folgt weiter:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&= \underbrace{\binom{n}{n}a^{n+1}b^0}_{k=n+1 \text{ Summand}} + \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)}_{\text{hierauf wenden wir Lemma 2.6 an}} a^k b^{n-k+1} + \underbrace{\binom{n}{0}a^0 b^{n+1}}_{k=0 \text{ Summand}} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k+1}.
\end{aligned}$$

Der Satz folgt nun also per Induktion. ■

3. Folgen und Reihen

Nach der Einführung in das Prinzip des Induktionsbeweises kehren wir jetzt zurück zu den reellen Zahlen. In diesem Kapitel führen wir "Folgen" und "Reihen" ein und werden deren "Konvergenzverhalten" studieren. Diese Begriffe werden uns durch die ganze Analysis begleiten.

3.1. **Quantoren.** Bevor wir uns den Folgen und Reihen zuwenden ist es sinnvoll noch schnell eine einfache, aber hilfreiche Notation einzuführen. Wenn man sich die vorherigen Kapitel noch mal anschaut, dann merkt man nämlich, dass immer wieder Formulierungen der Form "für alle $x \in X$" und der Form "es existiert ein $y \in Y$" auftauchen. Nachdem diese Ausdrücke im Folgenden eine noch viel wichtigere Rolle spielen werden ist es hilfreich folgende Abkürzungen einzuführen:

$\underset{x}{\forall} \ldots$ bedeutet "für alle x gilt …"

$\underset{x}{\exists} \ldots$ bedeutet "es gibt ein x, so dass …".[25]

Die Symbole $\forall$ und $\exists$ nennen wir *Quantoren.*

Beispiel. Im Folgenden schreiben wir drei der Körperaxiome um in Quantorenschreibweise:

	ursprüngliche Formulierung	Formulierung mit Quantoren
Axiom (A3)	Es existiert ein Element $N \in K$, so dass für alle $x \in K$ gilt: $x + N = x$	$\underset{N\in K}{\exists}\ \underset{x\in K}{\forall}\ x + N = x$
Axiom (A4)	Zu jedem $x \in K$ existiert ein Element $y \in K$, so dass $x + y = N$	$\underset{x\in K}{\forall}\ \underset{y\in K}{\exists}\ x + y = N$
Axiom (N)	Für alle $x > 0$ und $y > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n \cdot x > y$	$\underset{x>0,y>0}{\forall}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\exists}\ n \cdot x > y$

Als weiteres Beispiel erinnern wir uns an folgendes etwas unübersichtliche Korollar.

Korollar. 2.5 *Es sei $b > 1$. Für jedes $C \in \mathbb{R}$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $b^n > C$.*

Mithilfe von Quantoren können wir das nun wie folgt umschreiben.

Korollar. 2.5 *Es sei $b > 1$. Dann gilt:*

$$\underset{C\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq n_0}{\forall}\ b^n > C.$$

Wir sehen also, dass man mithilfe von Quantoren Formulierungen abkürzen kann. Was aber viel wichtiger ist, ist dass bei Quantorenschreibweise die logische Struktur einer Aussage viel offensichtlicher ist.

[25]Der Ausdruck "es gibt *ein* x" bedeutet, dass es mindestens ein solches x gibt, es kann aber beliebig viele geben. Wenn man sagen will, dass die Anzahl solcher x's gerade eins beträgt, dann sagt man "es gibt *genau* ein x".

Als letztes Beispiel führen wir noch folgende Definition ein, welche immer wieder einmal eine Rolle spielen wird.

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren:

$$f \text{ ist } \textit{beschränkt} \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{C\in\mathbb{R}}{\exists} \ \underset{x\in M}{\forall} \ |f(x)| \leq C.$$

Wenn eine Funktion nicht beschränkt ist, dann sagen wir, dass f *unbeschränkt* ist.

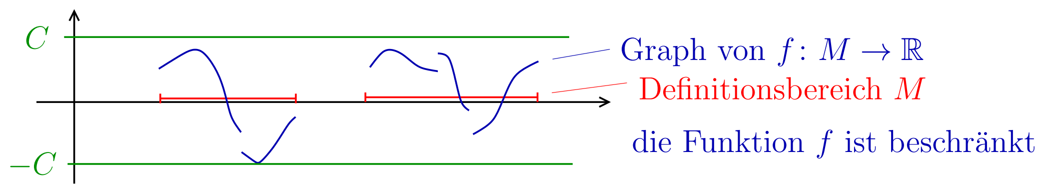


Abbildung 2. Illustration der Definition einer beschränkten Funktion.

In vielen Fällen müssen wir eine Aussage negieren. Es sei beispielsweise M eine Menge und für jedes $x \in M$ sei $A(x)$ eine Aussage, welche wahr oder falsch sein kann. Dann ist

$$\text{Negation von “für alle } x\in M, \text{ gilt } A(x)\text{”} \quad = \quad \text{“es gibt ein } x\in M, \text{ so dass } A(x) \text{ falsch ist”}.$$

Für eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ gilt beispielsweise

$$\text{Negation von “für alle } x \in M \text{ ist } f(x) \geq 1\text{”} \quad = \quad \text{“es gibt ein } x\in M, \text{ so dass } \underbrace{f(x) < 1}_{\substack{\text{Negation von} \\ f(x)\geq 1}}\text{”}$$

oder in Quantorenschreibweise

$$\text{Negation von } \underset{x\in M}{\forall} \ f(x) \geq 1 \quad = \quad \underset{x\in M}{\exists} \ f(x) < 1$$

Die gleiche Logik funktioniert auch mit den Rollen von $\forall$ und $\exists$ vertauscht. In der Tat, es gilt

$$\text{Negation von “es gibt ein } x\in M, \text{ so dass } A(x) \text{ gilt”} \quad = \quad \text{“für alle } x\in M \text{ ist } A(x) \text{ falsch”}.$$

Für eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ gilt beispielsweise

$$\text{Negation von “es gibt ein } x\in M \text{ mit } f(x) = 3\text{”} \quad = \quad \text{“für alle } x \in M \text{ ist } \underbrace{f(x) \neq 3}_{\substack{\text{Negation von} \\ f(x) = 3}}\text{”}$$

oder in Quantorenschreibweise

$$\text{Negation von } \underset{x\in M}{\exists} \ f(x) = 3 \quad = \quad \underset{x\in M}{\forall} \ f(x) \neq 3.$$

Wir sehen also, dass wir die Negation dadurch erhalten, dass wir $\forall$ und $\exists$ vertauschen, und die jeweilige Aussage $A(x)$ negieren. Dies funktioniert ganz analog, für Verkettungen von Quantoren. Beispielsweise gilt für eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \text{Negation von “} f\colon M \to \mathbb{R} \text{ ist beschränkt”} \quad &= \quad \text{Negation von } \underset{C\in\mathbb{R}}{\exists} \ \underset{x\in M}{\forall} \ |f(x)| \leq C \\ &= \underset{C\in\mathbb{R}}{\forall} \ \underset{x\in M}{\exists} \ \underbrace{|f(x)| > C}_{\substack{\text{Negation von} \\ |f(x)|\leq C}}. \end{aligned}$$

3.2. **Folgen.** Jetzt wenden wir uns dem eigentlichen Thema des Kapitels zu.

Definition. Eine *Folge von reellen Zahlen* (oder kurz "Folge") ist eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n \end{array}$$

Eine solche Folge wird oft auch mit $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, oder mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder mit $(a_n)_{n\geq 1}$ oder, noch knapper, mit (a_n) bezeichnet. [26]Die einzelnen Zahlen a_n werden *Folgenglieder* genannt.

Beispiel. Wir betrachten jetzt eine ganze Reihe von Folgen, damit wir ein Gefühl dafür kriegen, wie Folgen ausschauen können. Wir wollen dabei auch "qualitativ" beschreiben, wie sich die jeweilige Folge verhält:

	Definition der Folge	die ersten Folgenglieder	qualitatives Verhalten
(a)	$(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$	$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots$	die Folge geht gegen 0
(b)	$(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$	$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{25},\ \ldots$	die Folge strebt gegen 0
(c)	$(3)_{n\in\mathbb{N}}$	$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \ldots$	die Folge ist immer gleich 3
(d)	$(3+\frac{2}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$	$5,\ 3\frac{1}{2},\ 3\frac{2}{9},\ 3\frac{2}{16},\ 3\frac{2}{25},\ \ldots$	die Folge nähert sich immer mehr der 3
(e)	$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$	$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$	die Folge springt zwischen 1 und –1 hin und her
(f)	$(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$	$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \ldots$	die Folge strebt gegen 0
(g)	$(n^3)_{n\in\mathbb{N}}$	$1, 8, 27, 64, 125, 216, \ldots$	die Folge geht ins "Unendliche"

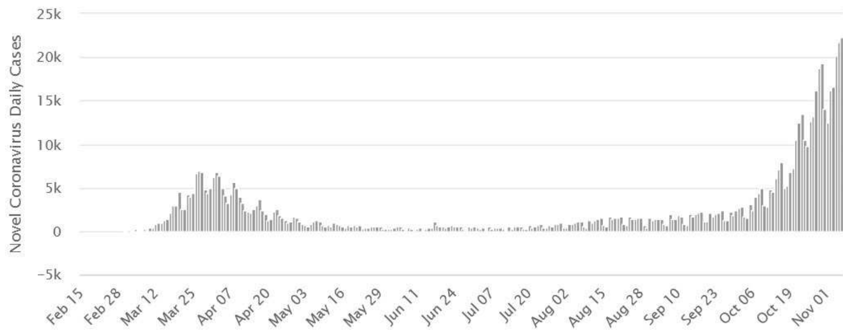
Es gibt aber auch noch kompliziertere Folgen, welche man nicht mit einem einzigen mathematischen Ausdruck definieren kann. Beispielsweise gibt es folgende schöne Folgen:

(h)	$\begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -\frac{1}{n^2}, & \text{sonst} \end{cases}$	$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{6}, \ldots$	die Folge strebt gegen 0
(i)	$\begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ prim} \\ 5, & \text{sonst} \end{cases}$	$5, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 5, \frac{1}{5}, 5, \frac{1}{7}, 5, 5, \ldots$	die Folge ist "zumeist" 5, aber nicht immer
(j)	$\begin{cases} 9, & \text{falls } n \leq 10 \\ \frac{1}{n}, & \text{sonst} \end{cases}$	$9, \ldots, 9, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \ldots$	für große n geht die Folge gegen 0
(k)	Zahl der Coronafälle am Tag 15. Februar $+n$		???

Wir sehen also, dass der Fantasie bei der Definition von Folgen keine Grenzen gesetzt sind.

Folgende Definition ist eigentlich nur ein Spezialfall der Definition auf Seite 30.

[26]Manchmal betrachten wir auch Abbildungen $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, welche wir ebenfalls als Folgen bezeichnen. Die Notationen ändern sich dann auf die offensichtliche Weise.



Quelle: https://www.worldometers.info/coronavirus/country/germany/

Abbildung 3. Coronafälle in Deutschland ab dem 15. Februar.

Definition. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen. Wir definieren:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist } \textit{beschränkt} \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{C\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ |a_n| \le C.$$

Andernfalls heißt die Folge *unbeschränkt*.

Beispiel.

(1) Alle Folgen (a),…,(j) mit Ausnahme von (g) sind beschränkt. Betrachten wir beispielsweise die Folge (d), d.h. die Folge $a_n = 3 + \frac{2}{n^2}$. Wir behaupten, dass[27] $C = 6$ die gewünschte Eigenschaft besitzt. In der Tat gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\left|3 + \tfrac{2}{n^2}\right| \;=\; 3 + \tfrac{2}{n^2} \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{aus } n \ge 1 \text{ folgt } n^2 \ge 1 \text{ und damit } \frac{2}{n^2} \le 2}}{\le}\; 3 + 2 \;=\; 5 \;=\; C.$$

(2) Die Folge (g), d.h. die Folge $(n^3)_{n\in\mathbb{N}} = 1, 8, 27, 64, 125, \ldots$, ist unbeschränkt.
(3) Wir hoffen auch, dass die Folge (k) beschränkt bleibt.

Wir wenden uns jetzt einer deutlich interessanteren Definition zu. Wir haben in den Beispielen gesehen, dass viele der Folgen “gegen einen Wert streben”. Wir wollen nun dieses “gegen einen Wert streben” mathematisch präzise formulieren. Wir führen dazu folgende Definition ein. Diese ist eine der wichtigsten Definitionen der Analysis. Sie ist leider auch zu Anfang eine der am schwersten zu verdauenden Definitionen.

Definition. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen.

(1) Es sei $a \in \mathbb{R}$. Wir definieren[28]

$$\begin{matrix}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen} \\ \text{den Grenzwert } a\end{matrix} \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\ge N}{\forall}\ \underbrace{|a_n - a| < \epsilon}_{\substack{\uparrow \\ \text{mit anderen Worten, es ist } a_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)}}.$$

[27]Wir hätten genauso gut $C = 5$ oder eine beliebige reelle Zahl ≥ 5 wählen können.

(2) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert, dann sagen wir, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Nullfolge* ist.
(3) Wir sagen die Folge *konvergiert*, wenn sie gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Bemerkung. Die Namen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a, ϵ, N und n sind völlig irrelevant. Beispielsweise gilt ganz genauso:

$$\begin{array}{c}(b_v)_{v\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen} \\ \text{den Grenzwert } y\end{array} \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} b_k = y \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\mu>0}{\forall} \ \underset{m_3\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{t\geq m_3}{\forall} \quad |b_t - y| < \mu.$$

Bemerkung. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Wir können die Definition der Konvergenz noch mal mit anderen Worten ausdrücken: eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem ϵ-Intervall $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ um a ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass ab N alle Folgenglieder in dem ϵ-Intervall $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ liegen.

Bemerkung. Im Folgenden stellen wir zwei Möglichkeiten vor mit denen Folgen zu illustriert werden können. Wir verwenden beide Möglichkeiten um die Konvergenz von Folgen zu illustrieren.

(1) Wir können uns Folgen als Punkte auf der "Gerade" $\mathbb{R}$ vorstellen. Dieser Ansatz wird in Abbildung 4 gewählt um die Konvergenz von Folgen zu illustrieren.

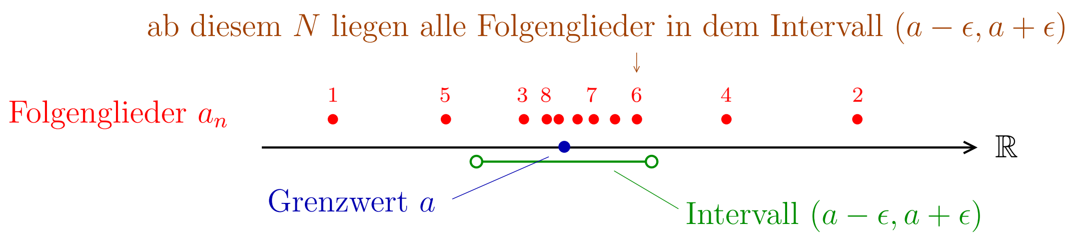


Abbildung 4. Erste Illustration der Definition der Konvergenz von Folgen.

(2) Ganz ähnlich wie in Abbildung 3 können wir uns eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auch mithilfe von Punkten in $\mathbb{R}^2$ vorstellen. In diesem Fall ist die logische Reihenfolge der Folgenglieder klar, aber es ist schwieriger die Folgenglieder zu vergleichen. In Abbildung 5 verwenden wir diesen Ansatz um die Konvergenz von Folgen zu illustrieren.

Wir werden Bilder nie verwenden um Aussagen zu beweisen. Aber Bilder können hilfreich sein um ein Gefühl für Folgen zu erhalten und um Ideen für Beweise zu erarbeiten.

Betrachten wir das vierte Beispiel von Seite 31, d.h. wir betrachten die Folge $\left(3+\frac{2}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir haben den Eindruck, dass die Folge gegen 3 strebt. Wenn unsere Definition von Konvergenz Sinn machen soll, dann muss diese Folgen gegen 3 konvergieren. Wie wir jetzt sehen werden ist dies in der Tat der Fall.

Behauptung. Es ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n^2}\right) \ = \ 3.$$

[28]Mit anderen Worten, die Folge *konvergiert gegen* $a \in \mathbb{R}$, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < \epsilon$.

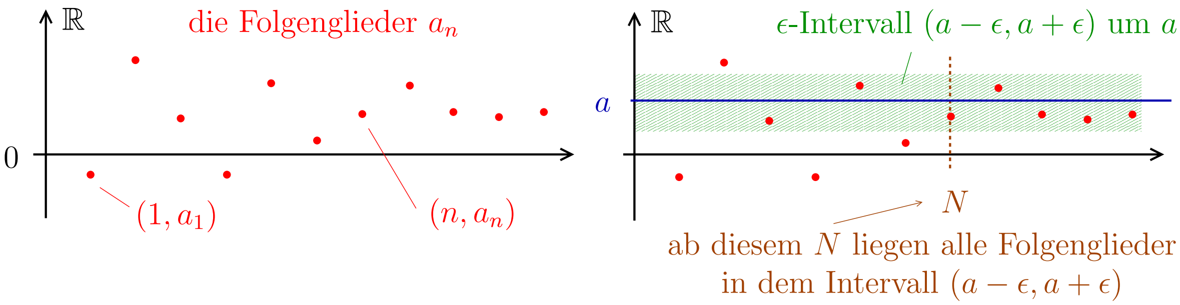


Abbildung 5. Zweite Illustration der Definition der Konvergenz von Folgen.

Beweis. Wir müssen also zeigen, dass

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall}\ \underbrace{\left|\left(3+\tfrac{2}{n^2}\right)-3\right|}_{=\frac{2}{n^2}} \ <\ \epsilon.$$

Es sei also $\epsilon > 0$ eine beliebige reelle Zahl größer Null. Wir müssen ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass für alle $n \geq N$ gilt $\frac{2}{n^2} < \epsilon$.

Nach Satz 1.22 gibt es zu jedem $\nu > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{1}{N} \ <\ \nu.$$

Wenn wir den Satz auf $\nu = \frac{\epsilon}{2}$ an erhalten wir ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{1}{N} \ <\ \frac{\epsilon}{2}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass dieses N die richtige Eigenschaft besitzt. Es sei also $n \geq N$, dann gilt

$$\frac{2}{n^2} \ =\ 2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} \ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{da } \frac{1}{n}\leq 1}}{\leq}\ 2\cdot\frac{1}{n} \ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{da } \frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}}}{\leq}\ 2\cdot\frac{1}{N} \ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Wahl von } N}}{<}\ 2\cdot\frac{\epsilon}{2} \ =\ \epsilon.$$

■

Bemerkung. Ein ganz ähnlicher (oder noch einfacherer) Beweis wie in der Behauptung zeigt, dass

$$\text{(a)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \ =\ 0, \qquad \text{(b)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} \ =\ 0 \quad\text{und}\quad \text{(c)}\quad \lim_{n\to\infty} 3 \ =\ 3.$$

Viele der weiteren oben genannten Folgen werden wir dann noch in den Übungsblättern 2 und 3 behandeln.

Der Ausdruck *der Grenzwert* legt natürlich nahe, dass wenn es einen Grenzwert gibt, dann ist dieser eindeutig. Dies ist in der Tat der Fall, wie der nächste Satz zeigt.

Satz 3.1. (Satz vom eindeutigen Grenzwert) *Jede konvergente Folge von reellen Zahlen konvergiert gegen* genau eine *reelle Zahl.*

In dem Beweis von Satz 3.1 vom eindeutigen Grenzwert verwenden wir folgendes Lemma.

Lemma 3.2. *Es sei $z \in \mathbb{R}$. Wenn für alle $\epsilon > 0$ gilt, dass $|z| < \epsilon$, dann ist $z = 0$.*

Beweis von Lemma 3.2 ($*$). Es sei $z \in \mathbb{R}$. Wir müssen also folgende Aussage beweisen:

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \; |z| < \epsilon \qquad \Longrightarrow \qquad z = 0.$$

Wir verwenden das Prinzip der Kontraposition, d.h. wir verwenden folgende allgemeine Aussage aus der Logik:

Aussage $A \Longrightarrow$ Aussage B ist äquivalent zu Negation von $B \Longrightarrow$ Negation von A.

In unserem Fall genügt es also zu zeigen:

$$z \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \underset{\epsilon>0}{\exists} \; |z| \geq \epsilon.$$

Es sei also $z \neq 0$. Wir setzen $\epsilon := \frac{|z|}{2} > 0$. Dann ist offensichtlich $|z| > \epsilon$. ■

Beweis von Satz 3.1 . Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Es seien x und y zwei Grenzwerte der Folge. Wir müssen zeigen, dass $x = y$. Lemma 3.2 besagt, dass es genügt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Für jedes $\mu > 0$ gilt $|x - y| < \mu$.

Es sei also $\mu > 0$. Zur Erinnerung, die Tatsache, dass x und y Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind bedeutet, dass folgende Aussagen gelten:

$$(1) \quad \underset{\epsilon>0}{\forall} \; \underset{N_x\in\mathbb{N}}{\exists} \; \underset{n\geq N_x}{\forall} \; |a_n - x| < \epsilon \qquad \text{und} \qquad (2) \quad \underset{\epsilon>0}{\forall} \; \underset{N_y\in\mathbb{N}}{\exists} \; \underset{n\geq N_y}{\forall} \; |a_n - y| < \epsilon.$$

Es folgt aus (1) und (2), angewandt auf $\epsilon = \frac{\mu}{2}$, dass

$$\underset{N_x\in\mathbb{N}}{\exists} \; \underset{n\geq N_x}{\forall} \; |a_n - x| < \frac{\mu}{2} \qquad \text{und} \qquad \underset{N_y\in\mathbb{N}}{\exists} \; \underset{n\geq N_y}{\forall} \; |a_n - y| < \frac{\mu}{2}.$$

Es sei nun $n \geq \max\{N_x, N_y\}$.[29] Dann gilt

$$|x - y| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wir führen hier eine Nullergänzung aus, d.h. wir fügen die Terme } -a_n \text{ und } -(-a_n) \text{ hinzu,} \\ \text{der Vorteil dieser Umformung ist, dass nun } a_n - x \text{ und } a_n - y \text{ auftauchen}}}{=} |(x - a_n) - (y - a_n)| \overset{\substack{\text{Dreiecksungleichung} \\ \downarrow}}{\leq} \underbrace{|x - a_n|}_{<\epsilon, \text{ da } n\geq N_x} + \underbrace{|y - a_n|}_{<\epsilon, \text{ da } n\geq N_y} < \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} \overset{\substack{\text{Definition von } \epsilon \\ \downarrow}}{=} \mu.$$

■

Satz 3.3. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Wir bezeichnen mit a den Grenzwert. Es gilt also:

$$(*) \qquad \underset{\epsilon>0}{\forall} \; \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \; \underset{n\geq N}{\forall} \; |a_n - a| < \epsilon.$$

---

[29] Wir bezeichnen mit $\max\{N_a, N_b\}$ das Maximum der beiden Zahlen N_a und N_b.

Wir müssen zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, d.h. wir müssen zeigen, dass es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n| \leq C$.

> Jetzt sind schon ein paar subtile erste Schritte im Beweis passiert: Wir haben der Folge und dem Grenzwert einen Namen gegeben. Damit kann man gleich viel besser arbeiten. Zudem haben wir noch einmal explizit die Definition von "Konvergenz" und von "beschränkt" hingeschrieben. Wir müssen also ein $C \in \mathbb{R}$ mit einer gewissen Eigenschaft finden. Das einzige, was wir wissen ist, dass es für jedes $\epsilon > 0$ eine Aussage gibt. Wir können ja mal schauen, was passiert wenn wir ein beliebiges $\epsilon > 0$, z.B. $\epsilon = 1$, wählen.

Es folgt aus $(*)$, angewandt auf $\epsilon = 1$, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < 1$. Wir setzen nun

$$C \;:=\; \underbrace{\max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a|+1\}}_{\text{Maximum der Zahlen } |a_1|, \dots, |a_{N\text{-}1}|, |a|+1}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass C die gewünschte Eigenschaft besitzt, d.h. wir wollen zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_n| \leq C$.

(1) Es ist offensichtlich, dass dies wahr ist für $n \in \{1, \dots, N-1\}$.
(2) Es sei nun $n \geq N$. Dann sehen wir, dass folgende Ungleichung gilt:

$$|a_n| \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{sogenannte "Nullergänzung"}}}{=}\; |a_n - a + a| \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Dreiecksungleichung}}}{\leq}\; |a_n - a| + |a| \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{da } n \geq N}}{<}\; 1 + |a| \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Definition von } C}}{\leq}\; C. \qquad \blacksquare$$

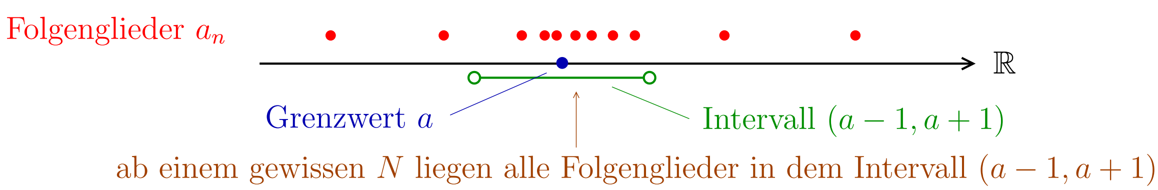


ABBILDUNG 6. Skizze für den Beweis von Satz 3.3.

Der folgende Satz gibt uns nun einige hilfreiche Rechenregeln für konvergente Folgen.

Satz 3.4. *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen von reellen Zahlen und es sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) & = & \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n \\
(2) & \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) & = & \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n \\
(3) & \lim\limits_{n\to\infty} \lambda \cdot a_n & = & \lambda \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n.
\end{array}$$

Wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $b_n \neq 0$ und wenn $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, dann gilt zudem

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Beweis. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen von reellen Zahlen.

> Es ist eine gute Idee, den Grenzwerten einen Namen zu geben, und die Definition der Konvergenz der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noch einmal hinzuschreiben. Nachdem es am Ende viele ϵ's geben wird, ist es auch weise, diese unterschiedlich zu bezeichnen.

Wir schreiben $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Es gilt also

$$(*) \qquad \underset{\epsilon_a>0}{\forall}\ \underset{N_a\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N_a}{\forall}\ |a_n - a| < \epsilon_a \qquad \text{und} \qquad \underset{\epsilon_b>0}{\forall}\ \underset{N_b\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N_b}{\forall}\ |b_n - b| < \epsilon_b.$$

Wir wenden uns jetzt dem Beweis der vier Aussagen zu.

(1) $(*)$ Wir müssen also jetzt zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a+b$. Es sei also $\epsilon > 0$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass es ein $N\in\mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt:

$$|(a_n + b_n) - (a+b)| \ < \ \epsilon.$$

> Wir müssen also ein $N\in\mathbb{N}$ finden, ab dem $|(a_n+b_n)-(a+b)| < \epsilon$ gilt. Aus $(*)$ folgt, dass wir $|a_n - a|$ und $|b_n - b|$ "unter Kontrolle" kriegen können. Wir müssen daher $|(a_n+b_n)-(a+b)|$ so umschreiben, dass $|a_n - a|$ und $|b_n - b|$ auftauchen. Wir machen dies durch folgende Ungleichung, welche aus der Dreiecksungleichung folgt:
>
> $$|(a_n+b_n)-(a+b)| \ = \ |(a_n - a) + (b_n - b)| \ \leq \ |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Wir setzen jetzt $\epsilon_a = \frac{\epsilon}{2}$ und $\epsilon_b = \frac{\epsilon}{2}$. Aus $(*)$ folgt, dass es $N_a \in \mathbb{N}$ und $N_b\in\mathbb{N}$ gibt, so dass gilt:

(a) für alle $n \geq N_a$ ist $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ (b) für alle $n\geq N_b$ ist $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$.

Wir setzen $N = \max\{N_a, N_b\}$. Wir wollen zeigen, dass dieses N die gewünschte Eigenschaft besitzt. Es sei also $n \geq N$. Dann gilt in der Tat:

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n - a) - (b - b_n)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungleichung}}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dies folgt aus (a) und (b), da} \\ n\geq N\geq N_a \text{ und } n\geq N\geq N_b}}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(2) Es sei also $\epsilon > 0$.

> Wir wollen zeigen, dass die Folge (a_nb_n) gegen ab konvergiert. In diesem Fall müssen wir also $|a_nb_n - ab|$ mithilfe von $|a_n - a|$ und $|b_n - b|$ abschätzen. In diesem Fall braucht das aber etwas mehr Phantasie als in (1). Um auf die Idee zu kommen beginnen wir mit einer kleinen Abschätzung.

Für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt:

$$|a_nb_n - ab| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nullergänzung}}}{=} |a_nb_n - ab_n + ab_n - ab| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungleichng}}}{\leq} |a_nb_n - ab_n| + |ab_n - ab| = |b_n|\cdot|a_n - a| + |a|\cdot|b_n - b|.$$

Wir können $|a_n - a|$ und $|b_n - b|$ “beliebig klein” machen. Aber um zu erreichen, dass $|a_n b_n - ab|$ kleiner als ϵ wird müssen wir auch die Zahlen $|b_n|$, $n \in \mathbb{N}$ in den Griff kriegen.

Nach Satz 3.3 existiert ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $|b_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $D := \max\{C, |a|, 1\}$.[30] Wir setzen nun $\epsilon_a = \frac{\epsilon}{2D}$ und $\epsilon_b = \frac{\epsilon}{2D}$. Aus (∗) folgt, dass es $N_a \in \mathbb{N}$ und $N_b \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt:

(a) für alle $n \geq N_a$ ist $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2D}$ (b) für alle $n \geq N_b$ ist $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2D}$.

Wir setzen $N = \max\{N_a, N_b\}$. Es sei nun $n \geq N$. Dann gilt

$$|ab - a_n b_n| \underset{\text{obige Abschätzung}}{\leq} \underbrace{|b_n|}_{\leq C \leq D} \cdot |a_n - a| + \underbrace{|a|}_{\leq D} \cdot |b_n - b| \underset{\text{dies folgt aus (a) und (b), da } n \geq N \geq N_a \text{ und } n \geq N \geq N_b}{<} D \cdot \frac{\epsilon}{2D} + D \cdot \frac{\epsilon}{2D} = \epsilon.$$

(3) Diese Aussage erhalten wir indem wir (2) auf die konstante Folge $b_n = \lambda$ anwenden.

(4) (∗) Wir nehmen nun also an, dass $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und dass $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Um auf eine Beweisidee zu kommen führen wir für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ folgende Abschätzung durch:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}\right| = \left|\frac{a_n b - ab + ab - a b_n}{b_n b}\right| \leq \left|\frac{1}{b_n}\right| \cdot |a_n - a| + \left|\frac{a}{b b_n}\right| \cdot |b_n - b|.$$

Nachdem $b = \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ gibt es ein $N' \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n| \geq \frac{|b|}{2}$ für alle $n \geq N'$.[31] Wir wählen nun ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $C \geq \left|\frac{2}{b}\right|$ und mit $C \geq \left|\frac{2a}{b^2}\right|$. Aus (∗) folgt, dass es $N_a \in \mathbb{N}$ und $N_b \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt:

(a) für alle $n \geq N_a$ ist $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2C}$ (b) für alle $n \geq N_b$ ist $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2C}$.

Wir setzen $N = \max\{N', N_a, N_b\}$. Es sei nun $n \geq N$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &\underset{\text{obige Ungleichung}}{\leq} \left|\frac{1}{b_n}\right| \cdot |a_n - a| + \left|\frac{a}{b b_n}\right| \cdot |b_n - b| \underset{\text{da } n \geq N \geq N'}{\leq} \left|\frac{2}{b}\right| \cdot |a_n - a| + \left|\frac{2a}{b^2}\right| \cdot |b_n - b| \\ &\underset{\text{da } n \geq N \geq N_a \text{ und } n \geq N \geq N_b}{<} \left|\frac{2}{b}\right| \cdot \frac{\epsilon}{2C} + \left|\frac{2a}{b^2}\right| \cdot \frac{\epsilon}{2C} \underset{\text{da } C \geq \left|\frac{2}{b}\right| \text{ und } C \geq \left|\frac{2a}{b^2}\right|}{\leq} \left|\frac{2}{b}\right| \cdot \frac{\epsilon}{2\left|\frac{2}{b}\right|} + \left|\frac{2a}{b^2}\right| \cdot \frac{\epsilon}{2\left|\frac{2a}{b^2}\right|} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

■

Der folgende Satz besagt, dass Produkt einer Nullfolge mit einer beschränkten Folge wiederum eine Nullfolge ist.

Satz 3.5. *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle Folgen. Es gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{und} \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n \cdot a_n = 0.$$

[30] Die “1” ist nur Teil der Definition von D um sicherzustellen, dass $D \neq 0$.

[31] Wer es so weit in den Beweis geschafft hat, darf sich überlegen, warum es solch ein N' gibt.

Beweis. Wir müssen also zeigen:

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall}\ |a_n| < \epsilon \quad \text{und} \quad \underset{C\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} |a_n| \leq C \quad \Longrightarrow \quad \underset{\mu>0}{\forall}\ \underset{M\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq M}{\forall}\ |a_n \cdot a_n| < \mu.$$

Es sei also $\mu > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $C \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n| \leq C$. Wenn $C = 0$, dann ersetzen wir dieses durch $C = 1$. Nach Voraussetzung existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n| < \frac{\mu}{C}$. Für alle $n \geq M := N$ gilt dann, dass

$$|a_n \cdot a_n| \;=\; |a_n| \cdot |a_n| \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Wahl von } C}}{\leq}\; |a_n| \cdot C \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{da } n\geq N}}{<}\; \frac{\mu}{C} \cdot C \;=\; \mu.$$

■

Wir beschließen das Teilkapitel über konvergente Folgen mit zwei Aussagen über den Zusammenhang von Grenzwerten und Ungleichungen.

Satz 3.6. *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen von reellen Zahlen. Es gilt:*

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n \geq b_n \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Beispiel. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen. Wir können in Satz 3.6 nicht einfach "$\geq$" durch "$>$" ersetzen. Mit anderen Worten, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > b_n$, dann gilt nicht notwendigerweise, dass auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Beispielsweise gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $\frac{1}{n} > 0$. Aber $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} 0$.

Der Beweis von Satz 3.6 ähnelt etwas dem Beweis von Satz 3.1. Auch in diesem Fall benötigen wir ein einfaches Lemma.

Bemerkung. Die Aussage von Satz 3.6 gilt insbesondere für den Fall, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konstante Folge ist. Es sei also beispielsweise $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und b eine reelle Zahl, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \geq b$. Dann ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq b$.

Lemma 3.7. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wenn für alle $\epsilon > 0$ gilt, dass $a > b - \epsilon$, dann ist $a \geq b$.*

Beweis von Lemma 3.7. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir müssen also folgende Aussage beweisen:

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ a > b - \epsilon \quad \Longrightarrow \quad a \geq b.$$

Wie im Beweis von Lemma 3.2 genügt es nach dem Prinzip der Kontraposition folgende äquivalente Aussage zu beweisen:

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\exists}\ a \leq b - \epsilon.$$

Es sei also $a < b$. Wir setzen $\epsilon = \frac{b-a}{2} > 0$. Dann ist $a \leq a + \frac{b-a}{2} = b - \epsilon$. ■

Beweis von Satz 3.6. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \geq b_n$. Wir schreiben $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Wir wollen zeigen, dass $a \geq b$. Nach Lemma 3.7 genügt es folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Für alle $\mu > 0$ gilt $a > b - \mu$.

Es sei $\mu > 0$. Es folgt aus der Definition von Grenzwerten, angewandt auf $\epsilon = \frac{\mu}{2}$, dass

$$(1) \quad \underset{N_a\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n\geq N_a}{\forall} \ \underbrace{|a_n - a| < \frac{\mu}{2}}_{\text{d.h. } a \in (a_n - \frac{\mu}{2}, a_n + \frac{\mu}{2})} \qquad \text{und} \qquad (2) \quad \underset{N_b\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n\geq N_b}{\forall} \ \underbrace{|b_n - b| < \frac{\mu}{2}}_{\text{d.h. } b_n \in (b - \frac{\mu}{2}, b + \frac{\mu}{2})} .$$

Es sei nun $n = \max\{N_a, N_b\}$. Dann gilt

$$a \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (1)}}}{>} a_n - \frac{\mu}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Voraussetzung}}}{\geq} b_n - \frac{\mu}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (2)}}}{\geq} \left(b - \frac{\mu}{2}\right) - \frac{\mu}{2} = b - \mu.$$

■

Satz 3.8. (Sandwichsatz) *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von reellen Zahlen und es sei $z \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \ a_n \leq y_n \leq b_n \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = z \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} y_n = z.$$

Beispiel. Wir betrachten die Folge $y_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $-\frac{1}{n} \leq (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$. Aus der Bemerkung auf Seite 34 und aus Satz 3.4 (3) folgt $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Es folgt aus dem Sandwichsatz, dass $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = 0$.

Beweis. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von reellen Zahlen, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq y_n \leq b_n$. Wir nehmen an, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert z konvergieren. Es gilt also:

$$(1) \quad \underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{N_a\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n\geq N_a}{\forall} \ a_n \in (z-\epsilon, z+\epsilon) \quad \text{und} \quad (2) \quad \underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{N_b\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n\geq N_b}{\forall} \ b_n \in (z-\epsilon, z+\epsilon)$$

Wir müssen zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = z$, d.h. wir müssen zeigen:

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{M\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n\geq M}{\forall} \ y_n \in (z-\epsilon, z+\epsilon).$$

Es sei also $\epsilon > 0$. Aus (1) und (2) folgt, dass es $N_a \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N_a$ gilt $a_n \in (z-\epsilon, z+\epsilon)$ und für alle $n \geq N_b$ gilt $b_n \in (z-\epsilon, z+\epsilon)$. Wir setzen $M := \max\{N_a, N_b\}$. Für alle $n \geq M$ gilt dann also $y_n \in (a_n, b_n)$ und $a_n \in (z-\epsilon, z+\epsilon)$ und $b_n \in (z-\epsilon, z+\epsilon)$. Also ist auch $y_n \in (z-\epsilon, z+\epsilon)$. ■

3.3. **Bestimmte Divergenz.**

Definition. Zur Erinnerung, wir sagen, eine Folge von reellen Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert*, wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, d.h. wenn die Folge (a_n) gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert, dann sagen wir die Folge *divergiert*.

Beispiel. Es ist nicht weiter schwierig zu zeigen, dass beispielsweise die Folgen $n \mapsto (-1)^n$ und $n \mapsto -\frac{1}{3}n^2$ divergieren.

Bei divergenten Folgen wollen wir zwei spezielle Typen von divergenten Folgen besonders betrachten.

Definition. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen. Wir sagen[32]

$$(a_n) \text{ divergiert bestimmt gegen } +\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{K\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n\geq N}{\forall} \quad a_n > K$$

und ganz analog definieren wir

$$(a_n) \text{ divergiert bestimmt gegen } -\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{K\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n\geq N}{\forall} \quad a_n < K$$

Im ersten Fall schreiben wir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und im zweiten Fall schreiben wir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Bemerkung. Mit anderen Worten, eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$, wenn es zu jeder Schranke K ein $N \in \mathbb{N}$, so dass ab N alle Folgenglieder größer als K sind. Diese Formulierung wird in Abbildung 7 illustriert.

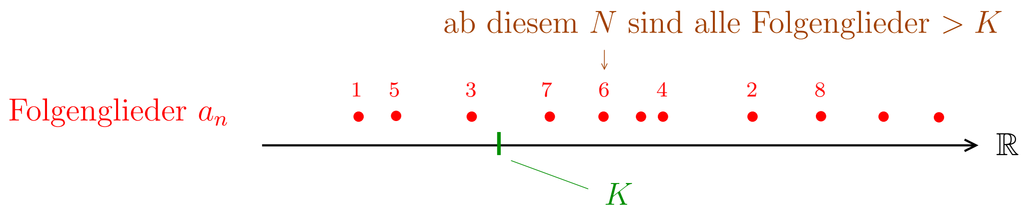


Abbildung 7. Illustration der Definition von bestimmter Divergenz gegen $+\infty$.

Beispiel.

(1) Die divergente Folge $n \mapsto (-1)^n$ divergiert nicht bestimmt gegen $+\infty$ oder $-\infty$. In der Tat kann man für $K = 1$ beziehungsweise $K = -1$ kein geeignetes N finden.

(2) Die divergente Folge $n \mapsto -\frac{1}{3}n^2$ divergiert bestimmt gegen $-\infty$. Mit anderen Worten, es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3}n^2 = -\infty$. In der Tat: es sei $K \in \mathbb{R}$. Wir wählen ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 3\cdot|K|$, z.B. $N = \lceil 3 \cdot |K| + 1\rceil$. Dann gilt für alle $n \geq N$, dass

$$-\tfrac{1}{3}\cdot n^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } n\geq N}}{\leq} -\tfrac{1}{3}\cdot N^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } k^2\geq k \text{ für} \\ \text{jedes } k\in\mathbb{N}}}{\leq} -\tfrac{1}{3}\cdot N \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } N>3\cdot|K|}}{<} -\tfrac{1}{3}\cdot 3\cdot|K| = -|K| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da für jedes } x\in\mathbb{R} \text{ gilt } -x\leq|x|}}{\leq} K.$$

(3) Ganz ähnlich wie in (2) zeigt man, dass für $d \in \mathbb{N}$ gilt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} n^d = +\infty$.

Satz 3.9. (Los Alamos Satz) *Es sei $x \in \mathbb{R}$, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \textit{falls } |x| < 1, \\ 1, & \textit{falls } x = 1, \\ \text{divergiert}, & \textit{falls } x \leq -1, \\ +\infty, & \textit{falls } x > 1. \end{cases}$$

[32] Manchmal wird “bestimmte Divergenz” auch als “uneigentliche Konvergenz” bezeichnet.

Beweis.

(a) Der Fall $|x| < 1$ wird wie Übungsaufgabe 3 (b) in Übungsblatt 2 bewiesen.
(b) Der Fall $x = 1$ ist offensichtlich, denn in diesem Fall ist die Folge konstant.
(c) Wir überlassen den Beweis als freiwillige Übungsaufgabe.
(d) Wenn $x > 1$, dann müssen wir also zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = +\infty$, d.h. wir müssen zeigen, dass die Folge (x^n) bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. Aber dies folgt sofort aus Korollar 2.5. ■

Beispiel. Ein Uran 235-Atom zerfällt nach einem Beschuß von einem Neutron in zwei Atome und drei Neutronen und gibt dabei Energie frei. Nehmen wir nun an, dass wir einen Behälter mit Uran 235 gegeben haben. Die Konstellation sei so, dass von den drei Neutronen, welches ein zerfallendes ^{235}U-Atom freisetzt, im Durchschnitt $x \in [0,3]$ Neutronen wieder ein ^{235}U-Atom treffen. Nehmen wir an, dass zu Beginn ein ^{235}U-Atom zerfällt. Die Zahl der zerfallenden ^{235}U-Atome nach n Schritten ist also x^n. Für beliebiges $x < 1$ erhalten wir die Lage links in Abbildung 8. Für beliebiges $x > 1$ erhalten wir die Lage rechts in Abbildung 8.

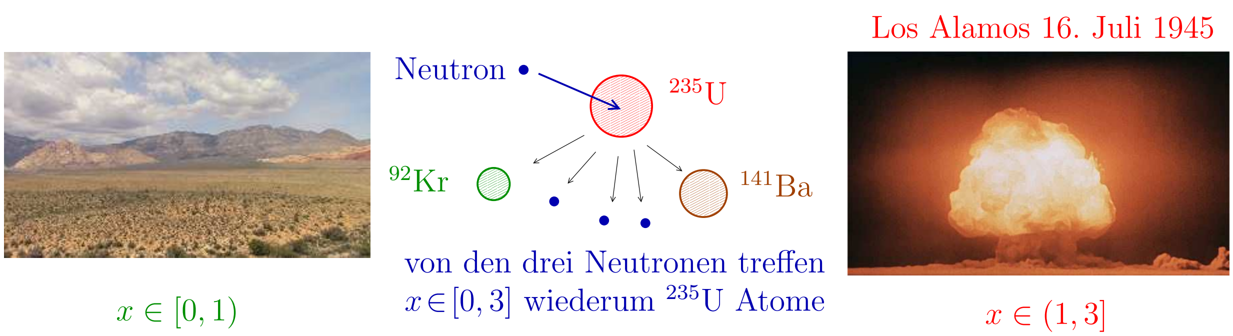


Abbildung 8.

Definition. Wir führen auf der Menge $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ folgende partielle Addition und partielle Multiplikation ein:[33]

$+$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$b \in \mathbb{R}$	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$*$
$-\infty$	$-\infty$	$*$	$-\infty$

und

$\cdot$	$a > 0$	0	$a < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$b > 0$	$a \cdot b$	0	$a \cdot b$	$+\infty$	$-\infty$
0	0	0	0	$*$	$*$
$b < 0$	$a \cdot b$	0	$a \cdot b$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$*$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$*$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

hierbei bedeutet $*$, dass die Addition beziehungsweise die Multiplikation nicht definiert ist, d.h. wir haben $\infty + (-\infty)$ und $(-\infty) + \infty$ *nicht* definiert und wir haben auch $0 \cdot (\pm\infty)$ nicht definiert.

[33] Die Addition und die Multiplikation ist dabei definiert, wie man es sich "naiv" denken würde. Wenn eine Verknüpfung "naiv" nicht klar ist, z.B. $-\infty + \infty$, dann ist diese in unserem Falle auch nicht definiert. Wir behaupten hier in keinsterweise, dass die Körperaxiome erfüllt sind.

Der folgende Satz ist nun eine Erweiterung von Satz 3.4 (1) und (2).

Satz 3.10. *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von reellen Zahlen, welche konvergieren oder welche bestimmt divergieren.*[34] *Dann gilt*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, wenn *die Summe "+" auf der rechten Seite in der obigen Tabelle definiert wurde.*

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, wenn *die Multiplikation "·" auf der rechten Seite in der obigen Tabelle definiert wurde.*

Beispiel. Es ist

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\underbrace{-\frac{1}{3}\cdot n^2}_{\substack{\text{divergiert bestimmt}\\ \text{gegen } -\infty}} + \underbrace{2+7\cdot\frac{1}{n^3}}_{\substack{\text{konvergiert}\\ \text{gegen } 2}}\Big) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus Satz 3.10, da } -\infty+2\\ \text{in der Tabelle definiert ist}}}{=} -\infty + 2 = -\infty.$$

Beweis (∗). Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen sind, ist dies gerade die Aussage aus Satz 3.4. Wir beweisen im Folgenden noch (1) für den Fall, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge ist, und dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. Alle weiteren Aussagen des Satzes werden dann ganz ähnlich bewiesen. Diese sind eine freiwillige Übungsaufgabe.

Wir müssen nun also zeigen, dass die Folge $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. Wir machen folgende Vorbemerkungen:

(a) Satz 3.3 besagt, dass jede konvergente Folge beschränkt ist. Es gibt also insbesondere ein $R\geq 0$, so dass für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt, dass $|a_n|\leq R$.

(b) Da $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert gilt: $\underset{C\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{M\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{m\geq M}{\forall}\ b_m > C$.

Wir müssen nun zeigen, dass die Folge $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, d.h. wir müssen zeigen, dass

$$\underset{D\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{L\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{l\geq L}{\forall}\ (a_l+b_l) > D.$$

Es sei also $D\in\mathbb{R}$ beliebig. Aus (b), angewandt auf $C=D+R$, folgt nun, dass es ein $M\in\mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m\geq M$ gilt, $b_m > C = D+R$. Wir setzen $L:=M$. Für alle $l\geq L$ gilt dann, dass

$$a_l+b_l \underset{\substack{\uparrow\\ \text{es gilt immer } x\geq -|x|}}{\geq} -|a_l|+b_l \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Wahl von } R}}{\geq} -R+b_l \underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } l\geq L=M}}{>} -R+D+R = D.$$

■

Um den den nächsten Satz formulieren zu können, führen wir folgende Notation ein.

Notation. Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen schreiben wir

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0^+$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und wenn alle Folgenglieder $a_n > 0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0^-$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und wenn alle Folgenglieder $a_n < 0$.

[34] Es ist auch erlaubt, dass eine Folge konvergiert und die andere bestimmt divergiert.

Der folgende Satz kann als Erweiterung von Satz 3.4 (4) aufgefasst werden. Etwas suggestiv ist die Aussage, dass $\frac{1}{\pm\infty} = 0$ und $\frac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty$. Wir wollen jedoch in dieser Vorlesung diese suggestive Notation nicht weiter verwenden.

Satz 3.11. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \neq 0$.*

$$\begin{array}{lrcrcl}
(1) & \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \text{ oder } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty & \Longrightarrow & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} & = & 0 \\
(2) & \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0^+ & \Longrightarrow & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} & = & +\infty \\
(3) & \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0^- & \Longrightarrow & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} & = & -\infty.
\end{array}$$

Beweis (∗). Wir beweisen zuerst Aussage (1) für den Fall $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Wir wollen also zeigen

$$\underset{K\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall}\ a_n > K \qquad \Longrightarrow \qquad \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{M\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq M}{\forall}\ \left|\tfrac{1}{a_n} - 0\right| < \epsilon.$$

Es sei also $\epsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > K := \frac{1}{\epsilon}$. Für alle $n \geq N$ gilt dann aber auch, dass $|\frac{1}{a_n} - 0| = |\frac{1}{a_n}| = \frac{1}{a_n} < \frac{1}{K} = \epsilon$.

Man sieht, diese Aussage beweist sich fast schon mechanisch. Das gilt genauso auch für die anderen Aussagen. Wir werden deswegen die anderen Aussagen nicht mehr explizit beweisen. ∎

Lemma 3.12. *Es sei $d \in \mathbb{Z}$, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} n^d = \begin{cases} +\infty, & \text{wenn } d > 0, \\ 1, & \text{wenn } d = 0, \\ 0, & \text{wenn } d < 0. \end{cases}$$

Beweis. Die Aussage für $d > 1$ wird fast genauso wie der Fall der Folge $-\frac{1}{3}n^2$ auf Seite 41 behandelt. Der Fall $d = 0$ ist trivial. Der Fall $d < 0$ folgt aus dem Fall $d > 0$ zusammen mit Satz 3.11 (1). ∎

Es sei $p(n)$ ein Polynom, also beispielsweise $p(n) = 2+3n-7n^2$ oder $p(n) = 5n+11n^4$. Das folgende Korollar besagt, dass der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} p(n)$ durch den höchsten Koeffizienten des Polynoms bestimmt ist.

Korollar 3.13. *Es seien $c_0, \ldots, c_d \in \mathbb{R}$ mit $d \geq 1$ und $c_d \neq 0$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \left(c_0 + c_1 \cdot n + c_2 \cdot n^2 + \cdots + c_{d-1} \cdot n^{d-1} + c_d \cdot n^d\right) = \begin{cases} \infty, & \text{wenn } c_d > 0, \\ -\infty, & \text{wenn } c_d < 0. \end{cases}$$

Beispiel. Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} (2 + 3n - 7n^2) = -\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (5n + 11n^4) = +\infty$.

Beweis.

Die Aussage des Korollars klingt so, als sollte man wohl direkt Satz 3.10 (1) anwenden. Aber dies ist im Allgemeinen nicht möglich. Beispielsweise divergiert bei der Folge $-3n + 4n^2$ der erste Summand bestimmt gegen $-\infty$ und der zweite Summand divergiert bestimmt gegen $+\infty$. Aber die Summe $(-\infty) + \infty$ hatten wir nicht definiert. Die Idee ist daher, die Folge $c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \cdots + c_{d-1} n^{d-1} + c_d n^d$ so umzuschreiben, dass man doch Satz 3.10 anwenden kann. Nachdem man "additiv" wenig umschreiben kann, werden wir die Folge "multiplikativ" umschreiben und dann Satz 3.10 (2) anwenden.

Wir führen folgende Berechnung durch:

$$\lim_{n\to\infty} \left(c_0 + c_1 \cdot n + c_2 \cdot n^2 + \cdots + c_{d-1} \cdot n^{d-1} + c_d \cdot n^d\right) \overset{\substack{\text{Ausklammern von } n^d \\ \downarrow}}{=}$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nachdem } d \geq 1 \text{ folgt aus} \\ \text{Lemma 3.12, dass die Folge } n^d \\ \text{bestimmt gegen } +\infty \text{ divergiert}}}{\lim_{n\to\infty} n^d} \cdot \overbrace{\left(c_0 \frac{1}{n^d} + c_1 \frac{1}{n^{d-1}} + c_2 \frac{1}{n^{d-2}} + \cdots + c_{d-1} \frac{1}{n} + c_d\right)}^{\substack{\text{es folgt aus Satz 3.4 und Lemma 3.12,} \\ \text{dass diese Folge gegen } c_d \text{ konvergiert}}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{diese Gleichheit folgt aus Satz 3.10, wir können diesen Satz anwenden,} \\ \text{da wir gerade gezeigt hatten, dass ein Faktor bestimmt divergiert} \\ \text{und der andere Faktor gegen die Zahl } c_d \neq 0 \text{ konvergiert}}}{=} (+\infty) \cdot c_d = \begin{cases} \infty, & \text{wenn } c_d > 0, \\ -\infty, & \text{wenn } c_d < 0. \end{cases}$$

■

Definition. Wir setzen die übliche Ordnung ">" auf $\mathbb{R}$ auf die Menge $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ fort, indem wir für alle $a \in \mathbb{R}$ schreiben

$$+\infty \;>\; a \;>\; -\infty.$$

Mit dieser Definition gilt nun folgende Verallgemeinerung von Satz 3.6.

Satz 3.14. *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von reellen Zahlen, welche konvergieren oder welche bestimmt divergieren. Es gilt:*

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n \geq b_n \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Beweis (∗). In Satz 3.6 haben wir den Fall betrachtet, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen sind. Wir müssen nun noch die verschiedenen Spezialfälle untersuchen bei denen mindestens eine der beiden Folgen bestimmt divergiert.

Es sei beispielsweise $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, welche bestimmt divergiert, so dass $a_n \geq b_n$ für alle n. Es genügt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

Nachdem $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Satz 3.3 beschränkt, d.h. es gibt ein $C \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $C \geq |a_n| \geq -C$. Nachdem $a_n \geq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt nun auch, dass $C \geq |a_n| \geq a_n \geq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere kann die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht bestimmt gegen ∞ divergieren. Nachdem die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert bleibt nur noch die Möglichkeit, dass $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$. ⊞

Die anderen Spezialfälle des Satzes werden nun ganz analog bewiesen. ■

Wir fahren mit folgender harmlosen Definition fort.

Definition. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen. Wir definieren:

$$\begin{array}{lll}
(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist } \textit{monoton steigend} & :\Longleftrightarrow & \text{für alle } n\in\mathbb{N} \text{ gilt } a_{n+1}\geq a_n\\
(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist } \textit{streng monoton steigend} & :\Longleftrightarrow & \text{für alle } n\in\mathbb{N} \text{ gilt } a_{n+1}> a_n\\
(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist } \textit{monoton fallend} & :\Longleftrightarrow & \text{für alle } n\in\mathbb{N} \text{ gilt } a_{n+1}\leq a_n\\
(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist } \textit{streng monoton fallend} & :\Longleftrightarrow & \text{für alle } n\in\mathbb{N} \text{ gilt } a_{n+1}< a_n.
\end{array}$$

Wir sagen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist *monoton*, wenn die Folge entweder monoton fallend oder monoton steigend ist.

Beispiel.

$$\begin{array}{rcll}
(n^2)_{n\in\mathbb{N}} & = & (1,4,9,25,\dots\dots) & \text{ist streng monoton steigend,}\\
(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} & = & (1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots) & \text{ist streng monoton fallend,}\\
(2n+(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} & = & (1,5,5,7,7,\dots) & \text{ist monoton steigend aber nicht streng monoton steigend}\\
(4-\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}} & = & (3,3\frac{3}{4},3\frac{8}{9},\dots) & \text{ist streng monoton steigend,}\\
(5)_{n\in\mathbb{N}} & = & (5,5,5,\dots) & \text{ist sowohl monoton steigend als auch monoton fallend,}\\
((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} & = & (-1,1,-1,\dots) & \text{ist nicht monoton.}
\end{array}$$

Folgender Satz gibt uns einfaches Kriterium um zu zeigen, dass eine Folge bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert.

Satz 3.15. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen. Dann gilt:*

$$\begin{array}{lllcl}
(1) & (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ unbeschränkt und monoton steigend} & \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n & = & +\infty,\\
(2) & (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ unbeschränkt und monoton fallend} & \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n & = & -\infty.
\end{array}$$

Beweis $(*)$. Wir beweisen nur die erste Aussage. Die zweite Aussage wird dann ganz ähnlich bewiesen. Es sei nun also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbeschränkte, monoton steigende Folge. Wir wollen also zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Es sei also $K\in\mathbb{R}$. Wir müssen zeigen, dass es ein $N\in\mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n\geq N$ gilt $a_n\geq K$.

Behauptung. Es gibt ein $N\in\mathbb{N}$ mit $a_N > K$.

Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung unbeschränkt ist existiert ein $m\in\mathbb{N}$ mit $|a_m| > K$.[35] Nachdem die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist gibt es zudem auch noch ein $N\in\mathbb{N}$, so dass $|a_N| > \max\{|a_1|,\dots,|a_m|\}$. Wir wollen nun zeigen, dass $a_N > K$. Dies sehen wir wie folgt:

(a) Da insbesondere $|a_N| > \max\{|a_1|,\dots,|a_m|\}$ sehen wir, dass $N > m$.
(b) Da die Folge monoton steigend ist, erhalten wir aus (a), dass $a_N > a_m$.
(c) Zudem gilt nach Wahl von N auch, dass $|a_N| > |a_m|$.
(d) Die Ungleichungen $a_N > a_m$ und $|a_N| > |a_m|$ aus (b) und (c) sind nur erfüllt, wenn $a_N > 0$.

[35] Man beachte hierbei den Absolutbetrag, dies ist der Grund, warum wir nicht schon fertig sind.

Insbesondere gilt also zusammengefasst: $a_N = |a_N| > |a_m| > K$. ⊞

Für alle $n \geq N$ folgt nun aus der Monotonie der Folge, dass $a_n \geq a_N > K$. ■

3.4. **Reihen.** In jedem Körper K macht es Sinn *endlich viele* Elemente $a_1, \ldots, a_n$ zu addieren, in dem wir iterativ insgesamt $n-1$ die Addition verwenden, d.h. wie auf Seite 12 erklärt setzen wir

$$a_1 + \cdots + a_n \ := \ (\ldots((a_1+a_2)+a_3)+\ldots)+a_n.$$

Es macht aber überhaupt keinen Sinn unendlich viele Elemente $a_1, a_2, \ldots$ eines Körpers zu addieren. Wir führen in diesem Teilkapitel den Begriff der Reihe ein, welcher unter streng geregelten Bedingungen die Rolle davon spielt, was man sich naiv unter einer unendlichen Summe von reellen Zahlen vorstellt. Wir betrachten ein paar Beispiele und beweisen einige wenige grundlegende Aussage. Reihen spielen im nächsten Kapitel schon mal eine wichtige Rolle. Später werden wir Reihen noch einmal deutlich ausführlicher behandeln.

Definition. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von reellen Zahlen.

(1) Für $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$k\text{-te Partialsumme der Folge } (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \ := \ \sum_{n=0}^{k} a_n \ = \ a_0 + a_1 + \cdots + a_k.$$

(2) Wir definieren[36]

$$\begin{aligned} \textit{die Reihe } \sum_{n\geq 0} a_n \ &:= \ \text{die Folge der Partialsummen der Folge } (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \\ &= \ \text{die Folge } (a_0,\ a_0{+}a_1,\ a_0{+}a_1{+}a_2,\ \ldots) \ = \ \text{die Folge } \begin{array}{l} a_0 \\ a_0{+}a_1 \\ a_0{+}a_1{+}a_2 \\ \vdots \end{array} \end{aligned}$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ nennen wir a_n das *n-te Glied der Reihe*.

Beispiel.

(1) Wir betrachten die Folge $n \mapsto a_n = n^2$. Die zugehörige Reihe ist

$$\sum_{n\geq 0} n^2 \ = \ (0^2,\ 0^2{+}1^2,\ 0^2{+}1^2{+}2^2,\ \ldots)$$

Es ist ziemlich klar, dass die Reihe $\sum_{n\geq 0} n^2$ monoton steigend und unbeschränkt ist. Insbesondere folgt aus Satz 3.15, dass die Reihe $\sum_{n\geq 0} n^2$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert.

(2) Es sei $z \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Folge $n \mapsto z^n$. Die zugehörige Reihe ist

$$\sum_{n\geq 0} z^n \ = \ (1,\ 1{+}z,\ 1{+}z{+}z^2,\ 1{+}z{+}z^2{+}z^3,\ \ldots)$$

---

[36]Die *Reihe* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *ist also eine Folge. Es macht also Sinn zu sagen, dass die Reihe* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *beschränkt ist, konvergiert, divergiert, bestimmt divergiert gegen* $\pm\infty$ etc.

Diese Reihe wird als *geometrische Reihe* bezeichnet. In Satz 3.16 werden wir sehen, für welche $z \in \mathbb{R}$ die geometrische Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$ konvergiert.

Definition. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von reellen Zahlen. Wenn die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ konvergiert, d.h. wenn die Folge der Partialsummen konvergiert, dann schreiben wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad := \quad \text{Grenzwert der Reihe } \sum_{n\geq 0} a_n \quad := \quad \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n.$$

Der Grenzwert der Reihe wird oft auch nur als *Wert der Reihe* bezeichnet. Zudem schreiben wir auch kurz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \; := \; \pm\infty, \qquad \text{wenn die Reihe } \sum_{n\geq 0} a_n \text{ bestimmt gegen } \pm\infty \text{ divergiert.}$$

Bemerkung. Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von reellen Zahlen. Wir unterscheiden also in der Notation zwischen folgenden Objekten:

(1) $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ dies ist die Reihe über die a_n, d.h. die Folge der Partialsummen,

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist der Grenzwert der Folge der Partialsummen, wenn dieser existiert.

In der mathematischen Umgangssprache wird leider allzuoft kein Unterschied zwischen diesen Begriffen gemacht.

Satz 3.16. (Satz über die geometrische Reihe) *Für jedes $z \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{1-z}, & \textit{falls } \; |z| < \;\; 1, \\ +\infty, & \textit{falls } \;\; z \geq \;\; 1, \\ \text{divergiert}, & \textit{falls } \;\; z \leq -1. \end{cases}$$

Veranschaulichung. In Abbildung 9 sehen wir eine Zerlegung des Quadrates von Seitenlänge 1 in Quadrate und Rechtecke mit Flächeninhalt $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$. Dies veranschaulicht die Tatsache, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{streng genommen Satz 3.17}}}{=} \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 3.16}}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \;=\; 1.$$

Beweis. Wir unterscheiden jetzt drei Fälle.
1. Fall: $|z| < 1$. In diesem Fall gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per Definition}}}{=} \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} z^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 2.2}}}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{1-z^{k+1}}{1-z} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 3.4}}}{=} \frac{\lim\limits_{k\to\infty} (1-z^{k+1})}{\lim\limits_{k\to\infty} (1-z)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 3.4}}}{=} \frac{\lim\limits_{k\to\infty} 1 - z \cdot \lim\limits_{k\to\infty} z^k}{\lim\limits_{k\to\infty} (1-z)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aus } |z|<1 \text{ und Satz 3.9} \\ \text{folgt: } \lim\limits_{k\to\infty} z^{k+1} = 0}}{=} \frac{1}{1-z}.$$

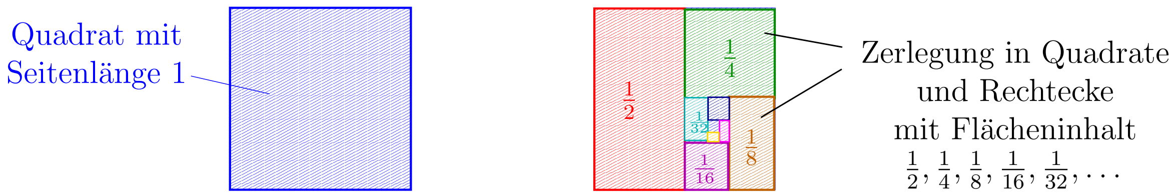


Abbildung 9. Illustration der geometrischen Reihe.

Der Ehrlichkeit halber muss man sagen, dass die Anwendung von Satz 3.4 etwas voreilig war, nachdem dieser nur angewendet werden darf, wenn man gezeigt hat, dass sowohl Zähler als auch Nenner konvergieren. Dies haben wir dann erst gegen Ende des Arguments gezeigt.
2. Fall: $z \geq 1$. In diesem Fall gilt

$$k\text{-te Partialsumme der Reihe } \sum_{n\geq 0} z^n \;=\; \sum_{n=0}^{k} z^n \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{aus } z \geq 1 \text{ folgt } z^n \geq 1}}{\geq}\; \sum_{n=0}^{k} 1 \;=\; k+1.$$

Es folgt nun leicht aus Satz 3.15, dass die Folge der Partialsummen bestimmt gegen $+\infty$ divergiert.
3. Fall: $z \leq -1$. Wir überlassen es dem gelangweilten Leser zu zeigen, dass die Reihe in diesem Fall divergiert. ■

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem nicht besonders überraschendem Satz.

Satz 3.17. *Es seien $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ und $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ zwei Reihen, welche konvergieren, oder welche bestimmt divergieren. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$ wenn *die Summe "+" auf der rechten Seite in der Tabelle auf Seite 42 definiert wurde.*

(2) *Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt* $$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda \cdot a_n \;=\; \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

(3) *Wenn $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt*
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \;\leq\; \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Beweis. Es seien $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ und $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ zwei Reihen, welche konvergieren, oder welche bestimmt divergieren. Für beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir mit $s_k = \sum\limits_{n=0}^{k} a_n$ und $t_k = \sum\limits_{n=0}^{k} b_n$ die zuhörigen Partialsummen.

(1) Es gilt

hier wenden wir die üblichen Rechenregeln für endliche Summen an

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n) &= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}(a_n+b_n) \overset{\downarrow}{=} \lim_{k\to\infty}\Big(\underbrace{\sum_{n=0}^{k}a_n}_{=s_k}+\underbrace{\sum_{n=0}^{k}b_n}_{=t_k}\Big)\\ &\underset{\uparrow}{=} \lim_{k\to\infty}\underbrace{\sum_{n=0}^{k}a_n}_{=s_k}+\lim_{k\to\infty}\underbrace{\sum_{n=0}^{k}b_n}_{=t_k} = \sum_{n=0}^{\infty}a_n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n.\end{aligned}$$

nach Satz 3.10 (1), angewandt auf die Folgen $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$,
wenn die rechte Seite definiert ist

(2) Die Aussage folgt sofort aus Satz 3.10 (2), angewandt auf die Folge der Partialsummen $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und auf die konstante Folge $(\lambda)_{k\in\mathbb{N}_0}$.

(3) Die Aussage folgt sofort aus Satz 3.14, angewandt auf die Folgen der Partialsummen $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$. ■

4. Cauchy-Folgen und das Vollständigkeitsaxiom

Auf Seite 18 hatten wir das Vollständigkeitsaxiom eingeführt, ohne die Begriffe zu erklären. Wir werden dies in diesem Kapitel nachholen, und wir werden dann viele verschiedene Folgerungen aus dem Vollständigkeitsaxiom formulieren.

4.1. **Das Vollständigkeitsaxiom.** In diesem Teilkapitel wollen wir endlich das Vollständigkeitsaxiom von Seite 18 sauber formulieren. Wir verwenden daher in diesem Teilkapitel noch mal kurzzeitig die etwas allgemeinere Sprache von angeordneten Körper.

Wir beginnen mit folgender wichtigen Definition.

Definition. Es sei K ein angeordneter Körper und es sei Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K.[37] Wir definieren

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine } \textit{Cauchy-Folge} :\iff \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n,m\geq N}{\forall}\ |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Bemerkung. Anschaulich gesprochen ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, wenn sich die Folgenglieder gegenseitig "immer näher kommen".

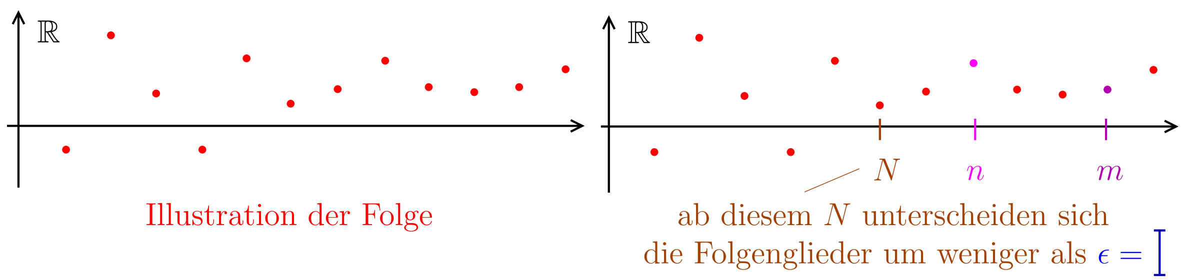


Abbildung 10. Zweite Illustration der Definition der Konvergenz von Folgen.

Die Definition von einer Cauchy-Folge ähnelt der Definition einer konvergenten Folge, und es stellt sich die Frage, was der Zusammenhang zwischen diesen beiden Begriffen ist. Der folgende Satz gibt uns eine halbe Antwort auf diese Frage.

Satz 4.1. *Es sei K ein angeordneter Körper. Jede konvergente Folge*[38] *in K ist auch eine Cauchy-Folge.*

Beispiel. Es sei K ein angeordneter Körper. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K. Satz 4.1 besagt insbesondere, dass wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch keine konvergente Folge. Mit dieser Beobachtung ist es nun leicht zu zeigen, wie schon auf Seite behauptet, dass die Folgen $(-1)^n$ divergieren.

Beweis. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Wir bezeichnen mit a den Grenzwert. Per Definition gilt also:

$$(*) \qquad \underset{\rho>0}{\forall}\ \underset{M\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq M}{\forall}\ |a_n - a| < \rho.$$

[37] Eine Folge in K ist natürlich eine Abbildung $\mathbb{N} \to K$.

[38] Die Konvergenz von Folgen in einem angeordneten Körper wird genauso definiert, wie zuvor.

Wir müssen zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Es sei also $\epsilon > 0$.

> Wir müssen ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt $|a_n - a_m| < \epsilon$. Wir verwenden nun folgenden Standardtrick, welcher aus der Dreiecksungleichung folgt:
>
> $$|a_n - a_m| \;=\; |(a_n - a) + (a - a_m)| \;\leq\; |a_n - a| + |a_m - a|.$$

Wir setzen $\rho = \frac{\epsilon}{2}$. Es folgt aus $(*)$ dass es ein $M \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m \geq M$ gilt $|a_m - a| < \rho = \frac{\epsilon}{2}$. Wir setzen jetzt $N = M$. Für alle $n, m \geq N$ gilt dann in der Tat, dass

$$|a_n - a_m| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungleichung, siehe oben}}}{\leq} |a_n - a| + |a_m - a| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } n,m\geq N}}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \;=\; \epsilon.$$

■

Es stellt sich nun noch die Frage, ob auch jede Cauchy-Folge eine konvergente Folge ist. Der folgende Satz, welchen wir schon in Kapitel 1 formuliert hatten, besagt, dass dies bei den reellen Zahlen in der Tat der Fall ist.

Satz. 1.20 (Existenz und Eindeutigkeit der reellen Zahlen *Es gibt (bis auf einen eindeutig bestimmten Isomorphismus) genau einen angeordneten Körper, genannt Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, welcher das archimedische Axiom erfüllt und welcher das Vollständigkeitsaxiom erfüllt:*

(V) *Jede Cauchy-Folge konvergiert.*

Bemerkung. Um keinerlei Missverständnisse aufkommen zu lassen wiederholen wir noch einmal die Hauptaussage von Satz 1.20:

jede Cauchy-Folge konvergiert im Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Um die Bedeutung des Vollständigkeitsaxioms besser würdigen zu können benötigen wir interessante Beispiele von Cauchy-Folgen. Folgender Satz gibt uns erst einmal ein nützliches Kriterium um zu zeigen, dass eine gegebene Folge eine Cauchy-Folge ist.

Satz 4.2. *Es sei K ein angeordneter Körper, welcher das archimedische Axiom erfüllt. Jede Folge in K, welche monoton und beschränkt ist, ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, welche monoton ist. Wir betrachten nur den Fall, dass die Folge monoton steigend ist. Der Fall, dass die Folge monoton fallend ist, wird fast genauso bewiesen.

Es sei also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge. Wir müssen beweisen:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt} \quad\Longrightarrow\quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Cauchy-Folge.}$$

Nach dem Prinzip der Kontraposition ist diese Aussage äquivalent zur Aussage:

$$\underbrace{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist unbeschränkt}}_{\text{Negation von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt}} \quad\Longleftarrow\quad \underbrace{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist keine Cauchy-Folge.}}_{\text{Negation von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Cauchy-Folge}}$$

Wir nehmen nun also an, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist, d.h. wir nehmen an:

$$(*) \qquad \underset{\epsilon>0}{\exists} \; \underset{N\in\mathbb{N}}{\forall} \; \underset{n,m\geq N}{\exists} \; |a_n - a_m| \geq \epsilon.$$

Wir müssen zeigen, dass dies impliziert, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist. Es sei also $C \in K$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass es ein $M \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_M > C$.

Behauptung.

(†) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ existiert ein $n \geq N$ mit $a_n - a_N \geq \epsilon$.

Es sei $N \in \mathbb{N}$. Aus $(*)$ folgt, dass es $m, n \geq N$ mit $|a_n - a_m| \geq \epsilon$ gibt. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $n \geq m$. Dann gilt

$$a_n - a_N \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da die Folge monoton steigend und } n\geq m\geq N}}{\geq} a_n - a_m \underset{\uparrow}{=} |a_n - a_m| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wahl von } m,n}}{\geq} \epsilon$$

$\boxplus$

Wir verfahren jetzt wie folgt. Wir setzen $n_0 = 1$.

(1) Wir wenden (†) auf $N = n_0$ an und erhalten $n_1 > n_0$ mit $a_{n_1} - a_{n_0} \geq \epsilon$.
(2) Wir wenden (†) auf $N = n_1$ an und erhalten $n_2 > n_1$ mit $a_{n_2} - a_{n_1} \geq \epsilon$.
(3) Wir wenden (†) auf $N = n_2$ an und erhalten $n_3 > n_2$ mit $a_{n_3} - a_{n_2} \geq \epsilon$.
$\vdots$

Wir erhalten also eine Folge $n_0, n_1, n_2, \ldots$ von Indizes, so dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{n_k} \geq a_{n_{k-1}} + \epsilon \geq a_{n_{k-2}} + 2\cdot\epsilon \geq \ldots \geq a_{n_0} + k\cdot\epsilon.$$

Es folgt aus dem Archimedischen Axiom, welches wir auf Seite 18 formuliert hatten, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_{n_k} \geq a_{n_0} + k\cdot\epsilon \geq C$ gibt. Mit anderen Worten, wir haben gezeigt, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist. ■

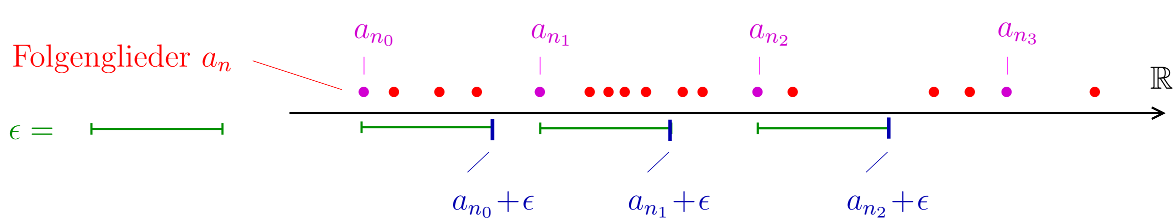


ABBILDUNG 11. Illustration für den Beweis von Satz 4.2.

Wir erhalten aus Satz 4.2 folgenden Satz.

Satz 4.3. (Konvergenzsatz für monotone Folgen) *Jede Folge, welche monoton und beschränkt ist, konvergiert in* $\mathbb{R}$.

Beweis. Der Satz folgt sofort aus Satz 4.2 und der Tatsache, dass in $\mathbb{R}$ jede Cauchy-Folge konvergiert. ■

Bemerkung. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, welche monoton fallend und beschränkt ist. Aus dem Konvergenzsatz 4.3 folgt, dass der Grenzwert $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert. Es folgt leicht aus Satz 3.6, angewandt auf die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die konstante Folge $(a)_{n\in\mathbb{N}}$, dass $a \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Das folgende Lemma gibt uns nun ein interessantes Beispiel einer Cauchy-Folge.

Lemma 4.4. *Es sei $z > 0$ eine reelle Zahl. Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, welche gegeben ist durch:*

$$a_0 := z \quad \text{und welche iterativ definiert ist durch} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{z}{a_n}\Big), \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Diese Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat die folgende Eigenschaften:

(1) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n^2 \geq z$.*
(2) *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.*
(3) *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.*
(4) *Wenn $z \in \mathbb{Q}$, dann gilt auch für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, dass $a_n \in \mathbb{Q}$.*
(5) *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.*
(6) *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{R}$.*
(7) *Der Grenzwert $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ hat die Eigenschaft, dass $a^2 = z$.*

Beispiel. Für $z = 2$ erhalten wir die Folge

$$a_0 = 2, \quad a_1 = \frac{1}{2}\cdot\Big(2 + \frac{2}{2}\Big) = \frac{3}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{17}{12}, \quad \ldots.$$

Diese Folge hat also die Eigenschaft, dass die Quadrate der Folgenglieder gegen 2 konvergieren. In der Tat ist $a_2^2 = \frac{289}{144}$ schon ziemlich nahe an 2 dran.

Beweis.

(1), (2) Diese Aussagen werden in Übungsblatt 3 bewiesen.

(3) Ein einfaches Induktionsargument zeigt, für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:dass $a_n \geq 0$. Zusammen mit (2) erhalten wir also, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_n| = a_n \leq a_1$. Die Folge ist also in der Tat beschränkt.

(4) Diese Aussage folgt aus einem einfachen Induktionsargument.

(5) Nach (1) und (3) ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt. Es folgt nun aus Satz 4.2, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(6) Diese folgt aus (5) und der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Oder etwas anders formuliert, die Aussage folgt aus (2) und (3) zusammen mit dem Konvergenzsatz 4.3.

(7) Nach (6) wissen wir, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wir setzen $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Verschieben der Folgenglieder}\\ \text{ändert den Grenzwert nicht}}}{=} \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Definition von } a_{n+1}}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{z}{a_n}\Big) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 3.4}}}{=} \frac{1}{2}\Bigg(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{z}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}\Bigg) = \frac{1}{2}\Big(a + \frac{z}{a}\Big).$$

Wir haben also gezeigt, dass $a = \frac{1}{2}(a + \frac{z}{a})$. Aber dies bedeutet gerade, dass $a^2 = z$. ■

Wenn wir im vorherigen Lemma beispielsweise mit $z = 2$ anfangen, dann erhalten wir also eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche gegen eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, mit $a^2 = 2$. Der folgende Satz besagt, dass diese Zahl a nicht rational ist.

Satz 4.5. *Es gibt keine rationale Zahl, deren Quadrat* 2 *ist.*

Beweis. Nehmen wir an es gäbe eine rationale Zahl r mit $r^2 = 2$. Dann könnten wir schreiben $r = \frac{a}{b}$, wobei $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremd sind. Durch Quadrieren erhalten wir, dass $2b^2 = a^2$. Wir sehen, dass 2 die linke Seite teilt, also muss 2 auch die rechte Seite teilen, also ist a gerade, d.h. $a = 2\widetilde{a}$ für ein $\widetilde{a} \in \mathbb{Z}$. Es folgt also, dass $2b^2 = 4\widetilde{a}^2$. Durch Kürzen sehen wir, dass $b^2 = 2\widetilde{a}^2$. Die rechte Seite ist also gerade, also muss auch die linke Seite gerade sein, d.h. b muss gerade sein.

Zusammengefasst haben wir gezeigt, dass a und b gerade sind. Dies ist aber ein Widerspruch zu der Tatsache, dass a und b teilerfremd sind. ∎

Korollar 4.6.

(1) *Es gibt reelle Zahlen, welche nicht rational sind.*
(2) *Der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist nicht vollständig.*

Beweis. Wir wenden Lemma 4.4 auf $z = 2$ an. Wir erhalten eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von *rationalen Zahlen*, welche gegen eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, mit $a^2 = 2$.

(1) Es folgt aus Satz 4.5, dass $a \notin \mathbb{Q}$. Wir haben also gezeigt, dass $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegt.[39]
(2) Wir hatten gerade angemerkt, dass a der Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Insbesondere ist nach Satz 4.1 die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Da der Grenzwert nicht in $\mathbb{Q}$ liegt, sehen wir, dass die Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht in $\mathbb{Q}$ konvergiert. Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ also nicht vollständig. ∎

Eine reelle Zahl, welche nicht rational ist, heißt *irrational*. Wir haben gerade in Korollar 4.6 gesehen, dass es irrationale Zahlen gibt. Wir beschließen das Teilkapitel mit folgender, bewußt unsauber formulierten Frage.

Frage 4.7. *Wieviel mehr reelle Zahlen als rationale Zahlen gibt es?*

Wir werden diese Frage später noch präzisieren und eine klare Antwort geben.

4.2. **Dezimaldarstellung von reellen Zahlen** (∗). [40] In diesem Teilkapitel wollen wir zeigen, dass jede reelle Zahl eine Dezimaldarstellung besitzt. Dies zeigt dann auch, dass die reellen Zahlen, wie wir sie in der Vorlesung eingeführt haben, der Schulvorstellung entsprechen.

Satz 4.8. *Es sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d > 1$ gegeben. Zudem sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, d-1\}$. Dann existiert der Grenzwert*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{d^n}.$$

---

[39] Für eine M und eine Teilmenge X schreiben wir $M \setminus X = \{p \in M \,|\, p \notin x\}$. Mit anderen Worten, $M \setminus X$ ist das Komplement von X in M.

[40] Auch hier bedeutet das (∗), dass wir den Stoff in der Vorlesung fast nicht behandelt haben. Sie können das Teilkapitel daher komplett ignorieren.

Definition. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von natürlichen Zahlen in $\{0,1,\ldots,d-1\}$. Wir schreiben

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{d^n}}_{\text{existiert nach Satz 4.8}} \quad =: \quad 0{,}a_1\,a_2\,a_3\,\ldots$$

Beweis (∗). Es sei $d\in\mathbb{N}$ mit $d>1$ gegeben. Zudem sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt, dass $a_n\in\{0,\ldots,d-1\}$. Per Definition müssen wir also zeigen, dass die Folge der Partialsummen $s_k := \sum_{n=1}^{k}\frac{a_n}{d^n}$ konvergiert. Nach dem Konvergenzsatz 4.3 genügt es zu zeigen, dass diese Folge monoton steigend und beschränkt ist. Wir zeigen dies in den folgenden beiden Argumenten:

(1) Für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt $s_{k+1}=s_k+\frac{a_{k+1}}{d^{k+1}}\geq s_k$, also ist die Folge monoton steigend.
(2) Für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$|s_k| \;=\; s_k \;=\; \sum_{n=1}^{k}\frac{a_n}{d^n} \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{da } a_n\leq d}}{\leq}\; \sum_{n=1}^{k}\frac{d}{d^n} \;=\; \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{d^{n-1}} \;=\; \sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{d^n} \;\leq\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{d^n} \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 3.16}}}{=}\; \frac{1}{1-\frac{1}{d}}.$$

Wir haben also gezeigt, dass die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$) der Partialsummen beschränkt ist. ■

Satz 4.9. *Es sei $z\in[0,1)$ gegeben und es sei $d\in\mathbb{N}$ mit $d\geq 2$. Dann gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n\in\{0,1,2,3,\ldots,d-1\}$, so dass*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{d^n} \;=\; z, \qquad \text{d.h. so dass } z \;=\; 0,a_1\,a_2\,a_3\,\ldots$$

Bemerkung. Satz 4.9 besagt insbesondere, dass es für jede reelle Zahl z eine monoton steigende Folge von rationalen Zahlen, nämlich in der Notation des Satzies die Folge der Partialsummen $\sum_{n=1}^{k}\frac{a_n}{d^n}$, gibt, welche gegen z konvergiert. Dies impliziert insbesondere, dass jedes Intervall der Form (a,b) mit $a<b$ unendlich viele rationale Zahlen enthält.

Beweis (∗). Es sei also $z\in[0,1)$ beliebig. Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iterativ wie folgt:

$a_1 := \lfloor z\cdot d\rfloor$, und iterativ definieren wir $a_n := \left\lfloor\left(z-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{d^i}\right)\cdot d^n\right\rfloor$ für $n=2,3,\ldots$.

Es folgt leicht aus der nächsten Behauptung, dass für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt: $a_n\in\{0,\ldots,d-1\}$.

Behauptung. Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$0 \;\leq\; z-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{d^i} \;<\; \frac{1}{d^n}.$$

Für $n\in\mathbb{N}$ gilt in der Tat

$$z-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{d^i} \;=\; \frac{1}{d^n}\cdot\left(\left(z-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{d^i}\right)\cdot d^n\right) \;=\; \frac{1}{d^n}\cdot\left(\left(z-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{d^n}\right)\cdot d^n-a_i\right) \;\overset{\substack{\text{denn für jedes } z\in\mathbb{R} \text{ gilt } z-\lfloor z\rfloor\in[0,1)\\ \downarrow}}{\in}\; \left[0,\frac{1}{d^n}\right).$$

⊞

Es folgt nun aus der Behauptung, zusammen mit Satz 3.9 angewandt auf $x = \frac{1}{d}$, und dem Sandwichsatz 3.8 dass

$$z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{d^n} \;=\; \lim_{n\to\infty} \left(z - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{d^i} \right) \;=\; 0.$$

Dies entspricht aber genau der Aussage, welche wir beweisen wollten. ■

Definition. Es sei $z \in [0,1)$. Nach Satz 4.9 gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \{0,1,2,3,\ldots,9\}$, so dass

$$z \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \;=:\; 0{,}a_1\, a_2\, a_3\, \ldots .$$

Wir bezeichnen dies als eine *Dezimaldarstellung von z*.

Bemerkung. Dezimaldarstellung von reellen Zahlen sind im Allgemeinen nicht eindeutig. Beispielsweise gilt:

$$\begin{aligned} 0{,}0999999\ldots \;=\; \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{10^n} \;=\; 9 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n \;&=\; 9 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n \;-1-\frac{1}{10}\right) \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 3.16}}}{=} 9 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1 - \frac{1}{10}\right) \;=\; \frac{1}{10} \;=\; 0{,}10000\ldots . \end{aligned}$$

Ganz ähnlich kann man viele weitere Beispiele konstruieren. Beispielsweise ist

$$0{,}\,312400000\ldots \;=\; 0{,}\,312399999999\ldots .$$

Der nächste Satz sagt, dass alle Beispiele von reellen Zahlen mit nicht eindeutiger Dezimaldarstellung von dem Typ in der Bemerkung sind.

Satz 4.10. *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei verschiedene Folgen, deren Folgenglieder in $\{0,1,2,\ldots,9\}$ liegen. Es gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n},$$

genau dann, wenn es ein $k \in \mathbb{N}_0$ und $c_1, \ldots, c_k \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \ldots) &= (c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, c_k, 9, 9, 9, \ldots), \text{ und} \\ (b_1, b_2, \ldots) &= (c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, c_k + 1, 0, 0, 0, \ldots), \end{aligned}$$

oder die gleiche Aussage gilt, mit den Rollen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vertauscht.

Beweis ($*$). Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei verschiedene Folgen, deren Folgenglieder in $\{0,1,2,\ldots,9\}$ liegen.

Die "wenn"-Richtung des Satzes wird genau wie in der Bemerkung bewiesen. Es genügt nun also die "genau dann"-Richtung des Satzes zu beweisen. Wir nehmen also an, dass

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}.$$

Nachdem die Folgen verschieden sind gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $a_i = b_i$ für $i = 1, \ldots, k-1$, aber so, dass $a_k \neq b_k$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $b_k > a_k$. Wir müssen zeigen, dass $b_k = a_k + 1$, und dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $b_{k+n} = 0$ und $a_{k+n} = 9$. Wir beweisen zuerst folgende Behauptung:

Behauptung 1. Es gilt folgende Ungleichung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+k} - b_{n+k}}{10^n} \;\geq\; b_k - a_k.$$

Es gilt in der Tat, dass:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+k} - b_{n+k}}{10^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+k} - b_{n+k}}{10^n} + (a_k - b_k) + (b_k - a_k) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+k} - b_{n+k}}{10^n} + (b_k - a_k) \\ &= 10^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n} + (b_k - a_k) = 10^k \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n} \right) + (b_k - a_k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da nach Voraussetzung } (*) \text{ gilt}}}{=} b_k - a_k\end{aligned}$$

⊞

Es verbleibt nun folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung 2. Es ist $b_k - a_k = 1$ und für alle $n \geq 1$ gilt: $a_{n+k} - b_{n+k} = 9$.

Die Behauptung folgt aus der Beobachtung, dass gilt:

$$1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } b_k > a_k}}{\leq} b_k - a_k \overset{\substack{\text{folgt aus Behauptung 1} \\ \downarrow}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+k} - b_{n+k}}{10^n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{die Ungleichheit folgt aus } a_{n+k} - b_{n+k} \in \{-9,\dots,9\} \\ \text{die Gleichheit gilt zudem nur, wenn} \\ \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ gilt, dass } a_{n+k} - b_{n+k} = 9}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Satz 3.16}}}{=} \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

Nachdem links und rechts 1 steht, müssen alle Ungleichungen auch schon Gleichungen gewesen sein. Also folgt nach der Diskussion, dass $b_k - a_k = 1$, und dass $a_{n+k} - b_{n+k} = 9$ für alle $k \in \mathbb{N}$. ■

Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Korollar zu Satz 4.9.

Korollar 4.11. *Jede reelle Zahl ist der Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen.*

Beweis. Es sei $x \in \mathbb{R}$. Wir setzen $a_0 = \lfloor x \rfloor$. Dann ist $x - a_0 \in [0, 1)$. Also gibt es nach Satz 4.9 eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$, so dass

$$x \;=\; a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \;=\; \lim_{k \to \infty} \underbrace{\left(a_0 + \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{10^n} \right)}_{\in \mathbb{Q}} \;=\; \text{Grenzwert der rationalen Folge } k \mapsto a_0 + \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{10^n}.$$

■

4.3. **Injektive, surjektive und bijektive Abbildung.** Bevor wir mit der Diskussion von rationalen und reellen Zahlen fortfahren, führen wir folgende ganz allgemeine Definition ein.

Definition. Es sei $f \colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen.

(1) Wir sagen f ist *injektiv*, wenn für alle $x_1 \neq x_2 \in X$ gilt, dass auch $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(2) Wir bezeichnen $f(X) := \{f(x) \,|\, x \in X\} \subset X$ als das *Bild von f*, oder manchmal auch als den *Wertebereich von f*.
(3) Wir sagen f ist *surjektiv*, wenn $f(X) = Y$. Mit anderen Worten, f ist surjektiv genau dann, wenn es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.
(4) Wenn f sowohl surjektiv als auch injektiv ist, dann nennen wir f *bijektiv*.

In der folgenden Tabelle betrachten wir einige Beispiele von Abbildungen:

$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n$	injektiv	surjektiv
$b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n$	injektiv	nicht surjektiv da $-2 \notin b(\mathbb{N})$
$c\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n^2$	injektiv	nicht surjektiv da $2 \notin c(\mathbb{N})$
$d\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, $n \mapsto n^2$	nicht injektiv da $d(-1) = d(1)$	nicht surjektiv da $2 \notin d(\mathbb{Z})$
$e\colon \mathbb{Z} \to \{x^2 \,|\, x \in \mathbb{N}_0\}$, $n \mapsto n^2$	nicht injektiv da $e(-1) = e(1)$	surjektiv
$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto 3 \cdot n + 7$	injektiv	nicht surjektiv da $0 \notin f(\mathbb{Z})$
$g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto 3 \cdot n + 7$	injektiv	surjektiv
$h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$	injektiv	surjektiv

4.4. **Abzählbare und überabzählbare Mengen.**

Definition. Eine nichtleere Menge[41] A heißt *abzählbar*, wenn es eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to A$ gibt. Wir sagen zudem, dass die leere Menge auch abzählbar ist. Eine Menge, welche nicht abzählbar ist, heißt *überabzählbar*.

Beispiel.

(1) Die Menge $\mathbb{N}$ ist abzählbar, denn die Identitätsabbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist offensichtlich surjektiv.
(2) Die Menge $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, denn wir hatten gerade im vorherigen Teilkapitel explizit eine surjektive Abbildung $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ angegeben.

[41] Die leere Menge ist die Menge, welche kein Element enthält. Eine Menge heißt nichtleer, wenn sie mindestens ein Element enthält.

(3) Die Menge $\{A, B, C, \dots, X, Y, Z\}$ der Buchstaben des Alphabets ist abzählbar. Beispielsweise ist folgende Abbildung surjektiv:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \{A, B, C, \dots, X, Y, Z\} \\ 1 & \mapsto & A \\ \vdots & & \vdots \\ 26 & \mapsto & Z \\ n & \mapsto & Z, \qquad \text{wenn } n \geq 27 \end{array}$$

(4) Man kann das vorherige Beispiel verallgemeinern und zeigen, dass jede endliche Menge abzählbar ist.

Satz 4.12. *Es sei A eine abzählbare Menge und B eine Teilmenge. Dann ist B auch abzählbar.*

Beweis $(*)$. Es sei A eine abzählbare Menge und B eine Teilmenge. Wenn B endlich ist, dann haben wir oben schon gesehen, dass B abzählbar ist. Nehmen wir nun an, dass B unendlich ist. Wir wählen eine surjektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to A$. Wir definieren nun iterativ

$$n_1 \;:=\; \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, f(n) \in B\},$$

und wenn $n_1, \dots, n_k$ schon definiert sind, dann definieren wir

$$n_{k+1} \;:=\; \min\{n > n_k \,|\, f(n) \in B\}.$$

Dann ist die folgende Abbildung surjektiv:[42]

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & B \\ k & \mapsto & f(n_k). \end{array}$$

■

Wir wollen jetzt zeigen, dass auch die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählbar ist.

Satz 4.13. *Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis. Wir betrachten folgendes quadratisches unendliches Schema:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \to & \frac{1}{1} & \to & -\frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & \to & -\frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \to & -\frac{3}{1} \;\dots \\
& & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
& & \frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & -\frac{2}{2} & & & & \\
& & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & & \\
& & \frac{1}{3} & & -\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \iddots & & & & \\
& & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
& & \frac{1}{4} & & -\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & & & & & \\
& & \vdots & & & \iddots & & & & & & &
\end{array}$$

[42] Wo haben wir im Beweis verwendet, dass B unendlich ist?

Es ist klar, dass jede rationale Zahl in diesem Schema auftaucht. Wir definieren nun eine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, indem wir $k \in \mathbb{N}$ das k-te Element in der obigen Aufführung von Elementen zuordnen. Diese Abbildung ist offensichtlich surjektiv.[43] ■

Der folgende Satz besagt dass, im Gegensatz zu der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen, die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen nicht abzählbar ist.

Satz 4.14. *Die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen ist überabzählbar.*

Beweis. Nach Satz 4.12 genügt es zu zeigen, dass das Interval $[0, 1)$ überabzählbar ist. Wir müssen also zeigen, dass es keine surjektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to [0, 1)$ gibt. Mit anderen Worten, wir wollen folgende Aussage beweisen.

Aussage. Für jede Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to [0, 1)$ gibt es ein $x \in [0, 1)$, welches nicht im Bild von f liegt.

Es sei also $f\colon \mathbb{N} \to [0, 1)$ eine Abbildung. Wir schreiben die Zahlen $f(1), f(2), \ldots$ in Dezimaldarstellung:

$$\begin{array}{rcl} f(1) & =: & 0, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots \\ f(2) & =: & 0, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots \\ f(3) & =: & 0, a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \ldots \\ \vdots & & \end{array}$$

Wir müssen ein $x \in [0, 1)$ finden, welches nicht im Bild von f liegt, d.h. welches von allen $f(n)$ verschieden ist. Wir betrachten die reelle Zahl

$$x \;:=\; 0, c_1\, c_2\, c_3 \ldots \qquad \text{wobei jeweils } c_n \;:=\; \begin{cases} 7, & \text{falls } a_{nn} \in \{0, \ldots, 4\} \\ 3, & \text{falls } a_{nn} \in \{5, \ldots, 9\}. \end{cases}$$

Wir haben die Ziffern c_n so gewählt, dass diese niemals 0 oder 9 werden. Es folgt aus Satz 4.10, dass die Dezimaldarstellung von x eindeutig ist. Es genügt nun zeigen, dass x nicht im Bild von f liegt. Mit anderen Worten, es genügt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x \neq f(n)$.

Es sei also $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Dezimaldarstellungen

$$\begin{array}{rclllllll} x & = & 0, c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_n & \ldots, & \quad \text{sowie} \\ f(n) & = & 0, a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & \ldots & \end{array}$$

Nachdem wir c_n so gewählt hatten, dass $c_n \neq a_{nn}$, unterscheiden sich die Dezimaldarstellungen sich in der n-ten Ziffer. Aber wir hatten oben angemerkt, dass die Dezimaldarstellung von x eindeutig ist. Es folgt also, dass in der Tat $x \neq f(n)$. ■

Bemerkung. Mithilfe von Satz 4.14 kann man auch problemlos zeigen, dass jedes Intervall der Form $[a, b]$ mit $a < b$ überabzählbar ist. Da die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist folgt, dass solch ein Intervall überabzählbar viele irrationale Zahlen enthält.

[43] Dieser Beweis kann natürlich auch deutlich formaler durchgeführt werden, ohne auf Bilder zurückzugreifen.

In Frage 4.7 hatten wir uns etwas naiv gefragt, wieviel mehr reelle Zahlen es als rationale Zahlen gibt. Die Tatsache, dass nach Satz 4.13 die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählbar ist, und dass nach Satz 4.14 die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen überabzählbar ist, gibt eine mathematische präzise Antwort auf diese Frage.

5. Folgerungen aus dem Vollständigkeitsaxiom

5.1. **Infimum und Supremum.**

Definition. Es sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wir führen folgende Begriffe ein:

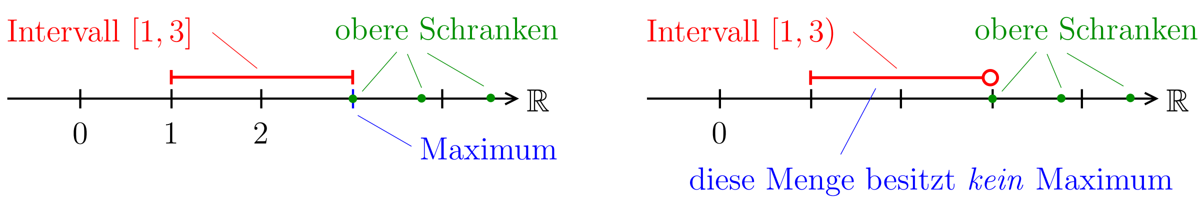
(1) Wir sagen $C \in \mathbb{R}$ ist eine *obere Schranke* für M, wenn für alle $x \in M$ gilt: $x \leq C$.
(2) Wenn M eine obere Schranke besitzt, dann nennen wir M *nach oben beschränkt*.
(3) *Wenn* es ein m in M gibt, welches eine obere Schranke für M ist, dann bezeichnen wir

$$\max(M) \ := \ m$$

als *das Maximum von* M. Insbesondere ist jede Menge mit einem Maximum auch nach oben beschränkt.

Beispiel. Wir betrachten ein paar Beispiele:

(1) Das Intervall $[1, \infty)$ ist nicht nach oben beschränkt, und besitzt daher auch kein Maximum.
(2) Es sei $M = [1, 3]$. Dann ist 3 eine obere Schranke, aber auch jede andere Zahl größer als 3 ist eine obere Schranke. Das Intervall $[1, 3]$ besitzt ein Maximum, nämlich 3.
(3) Es sei $M = [1, 3)$. Dann ist beispielsweise 3 eine obere Schranke, d.h. die Menge ist nach oben beschränkt. Andererseits besitzt $M = [1, 3)$ *kein* Maximum. In der Tat, denn es gibt kein $x \in [1, 3)$, welches die Eigenschaft besitzt, dass für alle $y \in [1, 3)$ gilt $y \leq x$.
(4) (a) Jede nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ hat ein Maximum.
    (b) Es sei nun $m \in \mathbb{N}$. Es folgt aus (a), dass jede nach oben beschränkte Teilmenge von $\{\frac{k}{m} \,|\, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -\frac{2}{m}, -\frac{1}{m}, 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots\}$ ein Maximum besitzt.



Wir umgehen jetzt das Problem, dass das Maximum einer nach oben beschränkten Menge nicht notwendigerweise definiert ist, indem wir das Supremum einführen.

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Wir sagen $s \in \mathbb{R}$ ist *Supremum* $\sup(M)$ von M, wenn s eine kleinste obere Schranke für M ist. Etwas genauer gesagt bedeutet dass:

(1) s ist eine obere Schranke für M, d.h. für alle $x \in M$ gilt $x \leq s$.
(2) Es gibt keine kleinere obere Schranke als s. Mit anderen Worten, es gilt eine der folgenden äquivalenten Aussagen:
    (a) Für alle $y < s$ gibt es ein $x \in M$ mit $y < x$.
    (b) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $x \in M$ mit $s - \epsilon < x$.

Man beachte, dass aus (2) folgt, dass ein Supremum, wenn es existiert, auch schon eindeutig bestimmt ist.

Beispiel.

(1) Wir betrachten noch einmal $M = [1,3)$. Dann ist $x = 3$ eine obere Schranke für $[1,3)$. Zudem gibt es keine kleinere obere Schranke für $[1,3)$. Also ist das Supremum gerade $= 3$.

(2) Ganz analog zu (1) zeigt man, dass für alle abgeschlossenen, halboffenen oder offenen Intervalle, welche nach oben beschränkt sind, das Supremum durch "die Zahl rechts" gegeben ist. Beispielsweise gilt für $a < b \in \mathbb{R}$, dass

$$\sup((-\infty, b)) \;=\; \sup([a,b]) \;=\; \sup((a,b]) \;=\; \sup([a,b)) \;=\; b.$$

(3) Es folgt leicht aus Satz 1.22, dass $\sup\{1 - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} = 1$.

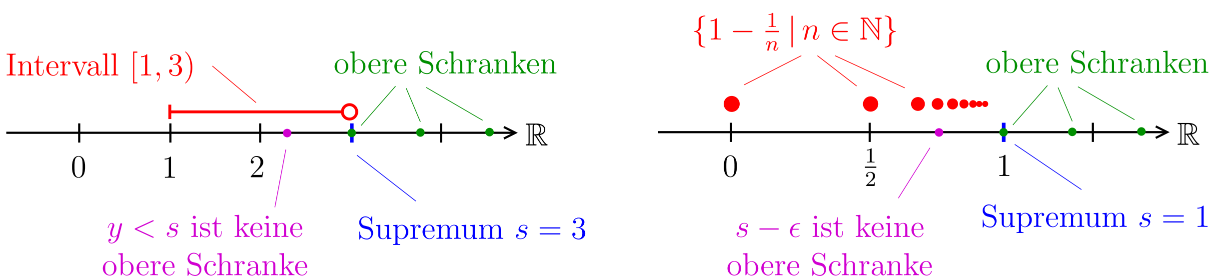


Abbildung 12. Die Suprema von $[1,3)$ und $\{1 - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Lemma 5.1. *Falls eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ ein Maximum besitzt, dann gilt:* $\max(M) = \sup(M)$.

Beweis. Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge, welche ein Maximum besitzt. Wir setzen $m := \max(M)$. Wir müssen zeigen, dass m die Eigenschaften (1) und (2) erfüllt.

(1) Per Definition ist m eine obere Schranke von M.

(2) Es sei $y < m$. Da $m \in M$ haben wir auch schon ein $x \in M$ mit $y < x$ gefunden. ■

Wir haben jetzt schon gesehen, dass es Mengen gibt, welche zwar kein Maximum aber dennoch ein Supremum besitzt. Der folgende Satz besagt nun, dass das kein Zufall ist.

Satz 5.2. (Satz von der Existenz des Supremums) *Jede nach oben beschränkte, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.*

Beweis. Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte, nichtleere Teilmenge. Wir müssen zeigen, dass ein Supremum von M existiert.

Wir hatten gesehen, dass eine nach oben beschränkte, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ nicht notwendigerweise ein Maximum besitzt. Andererseits folgt aus der Diskussion auf Seite 63, dass jede beschränkte, nichtleere Teilmenge von $\{\frac{k}{2^n} \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ ein Maximum besitzt. Wir wollen diese Tatsache ausnützen um das Supremum in $\mathbb{R}$ als Grenzwert einer Folge von Zahlen der Form $\frac{p_n}{2^n}$ zu konstruieren.

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir setzen[44]

$$p_n \;:=\; \text{kleinste ganze Zahl, mit der Eigenschaft, dass } \tfrac{p_n}{2^n} \text{ eine obere Schranke für } M \text{ ist.}$$

Behauptung. Die Folge $\left(\frac{p_n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend und beschränkt.

Wir beweisen die beiden Aussagen der Behauptung:

(1) Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt in der Tat folgende Ungleichung:

$$\frac{p_{n+1}}{2^{n+1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per Definition von } p_n \text{ ist } \frac{2p_n}{2^{n+1}} = \frac{p_n}{2^n} \text{ eine obere Schranke für } M, \\ \text{die Ungleichung folgt nun aus der Definition von } p_{n+1}}}{\leq} \frac{2p_n}{2^{n+1}} = \frac{p_n}{2^n}.$$

(2) Es sei $m \in M$. Aus (1) folgt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\frac{p_n}{2^n} \in [m, \frac{p_0}{2^0}]$. Dies impliziert, dass die Folge beschränkt ist. ⊞

Es folgt nun aus dem Konvergenzsatz 4.3, dass die Folge $\left(\frac{p_n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert. Wir setzen

$$s \;:=\; \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{2^n}.$$

Wir behaupten, dass s die gewünschten Eigenschaften (1) und (2) des Supremums besitzt.

(1) Es sei $x \in M$. Wir müssen zeigen, dass $x \leq s$. In der Tat gilt:

$$x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ gilt } x \leq \frac{p_n}{2^n}, \text{ die Ungleichung folgt also aus Satz 3.6}}}{\leq} \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{2^n} =: s.$$

(2) Wir müssen noch zeigen, dass s die kleinste obere Schranke ist. Es sei also $y < s$. Wir müssen zeigen, dass y keine obere Schranke für M sein kann, d.h. wir müssen zeigen, dass es ein $x \in M$ mit $y < x$ gibt.

(a) Nachdem $s - y > 0$ folgt aus dem Los Alamos Satz 3.9, dass es ein $m \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $\frac{1}{2^m} < s - y$.

(b) Per Definition von p_m gibt es ein $x \in M$ mit $x > \frac{p_m - 1}{2^m}$.

(c) Es gilt

$$x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wahl von } x}}{>} \frac{p_m - 1}{2^m} = \frac{p_m}{2^m} - \frac{1}{2^m} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } (\frac{p_n}{2^n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ fallend gilt } \frac{p_m}{2^m} \geq s}}{\geq} s - \frac{1}{2^m} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wahl von } m}}{>} y.$$

Wir haben also gezeigt, dass s die Eigenschaften des Supremums erfüllt, d.h. M besitzt ein Supremum. ■

Der folgende Satz gibt uns eine hilfreiche Charakterisierung des Supremums einer nichtleeren, nach oben beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}$. Der Satz erlaubt es uns zudem oft Aussagen über Suprema auf Aussagen über Grenzwerte zurückzuführen.

[44] Hierbei haben wir schon implizit verwendet, dass M nichtleer ist. Denn wäre M die leere Menge, dann wäre jede Zahl eine obere Schranke, also gäbe es kein kleinstes $p_n \in \mathbb{Z}$, so dass $\frac{p_n}{2^n}$ eine obere Schranke ist.

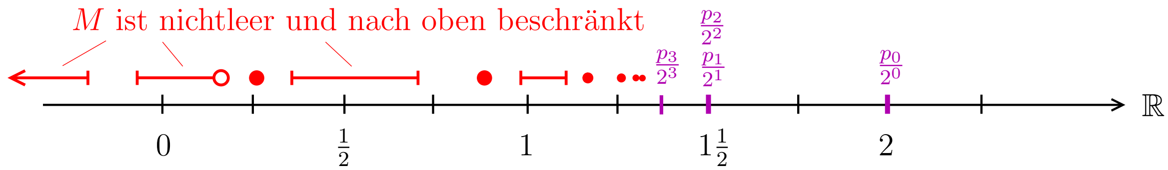


Abbildung 13. Illustration zum Beweis von Satz 5.2.

Satz 5.3. *Es sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.*

(1) *Wenn M nichtleer und nach oben beschränkt ist, dann existiert eine monoton steigende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen in M, welche gegen $\sup(M)$ konvergiert.*
(2) *Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen in M ist, welche konvergiert, und so dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ eine obere Schranke für M ist, dann ist*[45] $\sup(M) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Beweis $(*)$. Es sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wir schreiben $s := \sup(M)$.

(1) Wir nehmen an, dass M nichtleere und nach oben beschränkt ist. Wir definieren nun zuerst geschickt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir wählen ein beliebiges $a_1 \in M$. Nehmen wir an, wir haben $a_1, \dots, a_{n-1}$ schon gewählt. Nach Voraussetzung ist $s - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke für M, also gibt es ein $x \in M$ mit $s - \frac{1}{n} < x$. Andererseits ist s eine obere Schranke für M, also gilt $x \leq s$. Wir setzen nun $a_n := \max\{a_{n-1}, x\}$.
Zusammengefasst haben wir also eine monoton steigende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gefunden, so dass alle Folgenglieder in M liegen, und so dass $s - \frac{1}{n} < a_n \leq s$. Es folgt nun aus dem Sandwichsatz 3.8, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $s = \sup(M)$ konvergiert.
(2) Es sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen in M, welche konvergiert, und so dass $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ eine obere Schranke für M ist. Wir müssen zeigen, dass $a = \sup(M)$. Nachdem also a nach Voraussetzung eine obere Schranke für M ist, genügt es zu zeigen, dass es keine kleinere obere Schranke für M geben kann.
Es sei also $y < a$. Wir müssen zeigen, dass y keine obere Schranke für M ist. Anders ausgedrückt, wir müssen zeigen, dass es ein Element in M gibt, welches größer als y ist. Nachdem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gibt es insbesondere ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < a - y$. Dann gilt aber, dass $a_n - a \geq -|a_n - a| > y - a$, d.h. $a_n > y$. Wir haben also ein Element in M gefunden, nämlich a_n, welches größer als y ist. ■

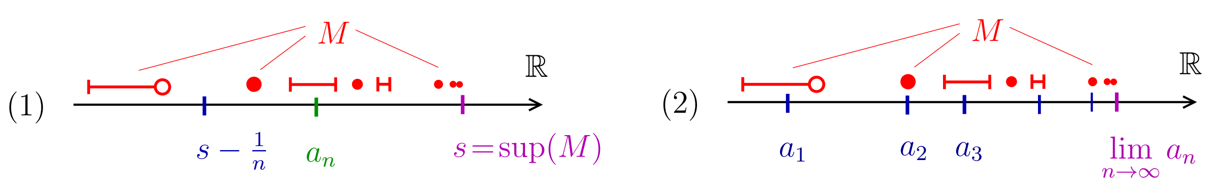


Abbildung 14. Illustration für den Beweis von Satz 5.3.

[45] Insbesondere ist die Aussage, dass das Supremum in der Tat existiert.

Beispiel. Wir betrachten

$$M \ := \ \mathbb{Q} \cap (-2,3) \ = \ \{\text{alle rationalen Zahlen im Intervall } (-2,3)\}.$$

Wir wollen zeigen, dass $\sup(M) = 3$. Dies kann man mithilfe der Definition zeigen, oder, falls diese doch zu verwirrend ist, mithilfe von Satz 5.3:

(1) Wir betrachten die Folge $a_n = 3 - \frac{1}{n}$. Dies ist eine Folge von Zahlen in M.
(2) Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (3 - \frac{1}{n}) = 3$ ist eine obere Schranke für M.

Also gilt nach Satz 5.3, dass $\sup(M) = 3$.

Im Folgenden führen wir nun ganz analog die Begriffe *Minimum*, *untere Schranke*, *nach unten beschränkt* und *Infimum* ein:

Definition. Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

(i) Wir sagen $C \in \mathbb{R}$ ist eine *untere Schranke* für M, wenn für alle $x \in M$ gilt: $C \leq x$.
(ii) Wenn M eine untere Schranke besitzt, dann nennen wir M *nach unten beschränkt*.
(iii) *Wenn* es ein m in M gibt, welches eine untere Schranke für M ist, dann bezeichnen wir
$$\min(M) \ := \ m$$
als *das Minimum von M*.
(iv) Wir sagen $i \in \mathbb{R}$ ist *Infimum* $\inf(M)$ von M, wenn i eine größte untere Schranke für M ist. Das bedeutet also:
  (1) i ist eine untere Schranke für M, d.h. für alle $x \in M$ gilt $i \leq x$.
  (2) Es gibt keine größere untere Schranke als s. Mit anderen Worten, es gilt eine der folgenden äquivalenten Aussagen:
    (a) Für alle $y > i$ gibt es ein $x \in M$ mit $x < y$.
    (b) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $x \in M$ mit $x < s + \epsilon$.
  Wenn das Infimum existiert, dann folgt aus (1) und (2) schon, dass es eindeutig bestimmt ist.

Es gelten dann auch die offensichtlichen Varianten von Lemma 5.1, Satz 5.2 und Satz 5.3. Der vollständigkeit halber formulieren wir diese drei Aussagen. Der Beweis ist in allen drei Fällen jeweils fast wort-wörtlich der gleiche wie bei den beiden vorhergehenden Sätzen.

Lemma 5.4. *Wenn eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ ein Minimum besitzt, dann gilt* $\min(M) = \inf(M)$.

Satz 5.5. (Satz von der Existenz des Infimums) *Jede nach unten beschränkte, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimimum.*

Satz 5.6. *Es sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.*

(1) *Wenn M nichtleer und nach unten beschränkt ist, dann existiert eine monoton fallende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen in M, welche gegen* $\inf(M)$ *konvergiert.*
(2) *Wenn es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen in M gibt, welche konvergiert, und so dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ eine untere Schranke für M ist, dann ist* $\inf(M) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Beispiel. Wir betrachten

$$M \;:=\; \mathbb{Q} \cap (2,4) \;=\; \{x \in (2,4) \,|\, x \in \mathbb{Q}\}.$$

Dann ist $\inf(M) = 2$. Dies folgt leicht aus den Definitionen, oder es folgt auch aus Satz 5.6. In der Tat, betrachten wir die Folge $a_n = 2 + \frac{1}{n}$, dann liegen alle Folgenglieder in M, und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(2 + \frac{1}{n}) = 2$ ist eine untere Schranke für M. Also gilt nach Satz 5.6, dass $\inf(M) = 2$.

Wir werden jetzt die Existenz von Suprema verwenden, um zu zeigen, dass jede nichtnegative reelle Zahl Wurzeln beliebiger Ordnung besitzt.

Satz 5.7. *Es sei $y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert genau ein $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a^n = y$.*

Bemerkung. Den Spezialfall $n = 2$ von Satz 5.7 hatten wir eigentlich schon in Lemma 4.4 bewiesen. Der neue Beweis ist weniger explizit, aber dafür können wir nun die Aussage für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ beweisen.

Definition. Es sei $y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 5.7 gibt es genau genau ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$, so dass $a^n = y$. Wir bezeichnen a als die *n-te Wurzel von y* und bezeichnen es mit $\sqrt[n]{y}$. Wie üblich schreiben wir $\sqrt{y} := \sqrt[2]{y}$.

Beweis der Existenzaussage von Satz 5.7. Es sei $y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir wollen zeigen, dass es ein $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a^n = y$ gibt. Wir setzen

$$M \;:=\; \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^n \leq y\}.$$

Wir wollen zeigen, dass das Supremum $\sup(M)$ von M die gewünschte Eigenschaft besitzt, d.h. wir wollen zeigen, dass $\sup(M)^n = y$. Dazu müssen wir aber erst einmal zeigen, dass das Supremum von M definiert ist:

Behauptung. Die Menge M ist nichtleer und die Menge M und ist nach oben beschränkt.

Die Menge M enthält $x = 0$, also ist M nichtleer. Es verbleibt zu zeigen, dass M nach oben beschränkt ist. Wir unterscheiden die beiden Fälle $y \leq 1$ und $1 < y$.

(1) Wenn $y \leq 1$, dann ist 1 eine obere Schranke von M.
Wir müssen also zeigen: $x \in M \Longrightarrow x \leq 1$. Mit anderen Worten, wir müssen zeigen: $x > 1 \Longrightarrow x \notin M$.
Es sei also $x > 1$. Dann gilt $x^n > 1 \geq y$, d.h. x liegt nicht in M.

(2) Wenn $1 < y$, dann ist y eine obere Schranke von M. In der Tat, denn aus $x > y$ folgt auch, dass $x^n > y^n > y$, d.h. x liegt nicht in M. ⊞

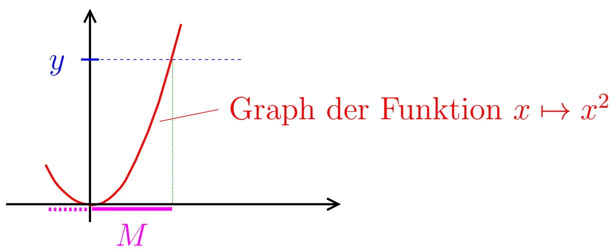
Nach Satz 5.2 existiert also das Supremum vom M. Es genügt nun also folgende Behauptung zu beweisen.

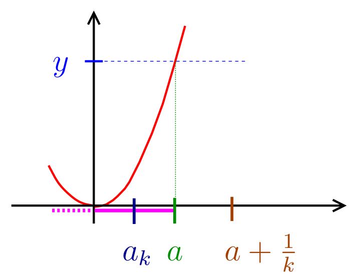
Behauptung. Für $a := \sup(M)$ gilt $a^n = y$.

Nach Satz 5.3 (1) gibt es eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von *Zahlen in M* mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$. Dann gilt

$$y \underset{\substack{\uparrow\\ \text{da } a_k\in M \text{ gilt } a_k^n\le y\text{, die Ungleichung}\\ \text{folgt nun aus Satz 3.6}}}{\geq} \lim_{k\to\infty} a_k^n \overset{\substack{\text{folgt aus Satz 3.4 (2)}\\ \downarrow}}{=} \left(\lim_{k\to\infty} a_k\right)^n = a^n = \left(\lim_{k\to\infty}\left(a+\tfrac{1}{k}\right)\right)^n \overset{\substack{\text{folgt aus Satz 3.4 (2)}\\ \downarrow}}{=} \lim_{k\to\infty}\left(a+\tfrac{1}{k}\right)^n \underset{\substack{\uparrow\\ \text{da } a \text{ eine obere Schranke für } M \text{ ist, gilt für alle } c>a,\\ \text{dass } c^n>y\text{, insbesondere gilt also } (a+\frac{1}{k})^n>y\\ \text{die Ungleichung folgt also aus Satz 3.6}}}{\geq} y.$$

Wir haben also gezeigt, dass $y \geq a^n \geq y$. Also ist $a^n = y$. ■





Beweis der Eindeutigkeitsaussage von Satz 5.7. Es sei $y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Es seien also $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $a^n = b^n = x$. Wir wollen zeigen, dass $a = b$. Rein aus Vergnügen geben wir zwei verschiedene Beweise.

(1) Zuerst führen wir einen Widerspruchsbeweis durch. Nehmen wir also an, dass $a \neq b$. O.B.d.A. können wir dann annehmen, dass $a > b$. Dann gilt aber $y = a^n > b^n = y$ und dies ist ein Widerspruch.

(2) Es ist oft etwas eleganter, ohne Widerspruchsbeweis auszukommen. Für Feinschmecker ist also hier noch ein direkter Beweis, dass $a = b$. Wir betrachten folgende Umformung:

$$0 = y - y = a^n - b^n \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sieht man durch Ausmultiplizieren der rechten Seite}}}{=} (a-b)\cdot(a^{n-1} + ab^{n-2} + a^2b^{n-3} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Einer der beiden Faktoren rechts muss also null sein. Wenn der erste Faktor 0 ist, dann ist natürlich $a = b$. Nachdem $a, b \geq 0$ kann der zweite Faktor nur 0 sein, wenn alle Terme $= 0$ sind. Dies impliziert, dass $a = b = 0$. ■

5.2. **Teilfolgen und der Satz von Bolzano-Weierstraß.**

Definition. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und es sei $n_1 < n_2 < \ldots$ eine streng monoton steigende Folge von natürlichen Zahlen. Dann ist

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots)$$

auch eine Folge, welche wir als *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen.

Beispiel. Wir betrachten die Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad = \quad (3+\tfrac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \quad = \quad (4,\ 3\tfrac{1}{2},\ 3\tfrac{1}{3},\ 3\tfrac{1}{4},\ 3\tfrac{1}{5},\ 3\tfrac{1}{6},\ 3\tfrac{1}{7},\ 3\tfrac{1}{8},\ 3\tfrac{1}{9},\ \dots)$$

Wir betrachten nun die Indizes $n_k = 2k+1,\ \ k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \quad = \quad (3+\tfrac{1}{2k+1})_{k\in\mathbb{N}} \quad = \quad (\qquad 3\tfrac{1}{3}, \qquad 3\tfrac{1}{5}, \qquad 3\tfrac{1}{7}, \qquad 3\tfrac{1}{9},\ \dots)$$

eine Teilfolge der ursprünglichen Folge.

Wir werden öfters bewußt oder unbewußt folgendes Lemma verwenden.

Lemma 5.8. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert auch jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert.*

Beweis $(*)$. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Grenzwert a. Es sei $n_1 < n_2 < \dots$ eine streng monoton steigende Folge von natürlichen Zahlen. Wir müssen zeigen, dass $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Es sei also $\epsilon > 0$. Es folgt aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Nachdem $n_1 < n_2 < \dots$ eine streng monoton steigende Folge von natürlichen Zahlen ist, gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$, dass $n_k \geq k$. Es folgt also, dass für alle $k \geq N$ gilt, dass $|a_{n_k} - a| < \epsilon$. ■

Wir wenden uns jetzt dem Hauptresultat von diesem Teilkapitel zu.

Satz 5.9. (Satz von Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte reelle Folge besitzt eine Teilfolge, welche in $\mathbb{R}$ konvergiert.*

Beispiel. Betrachten wir beispielsweise die Folge

$$a_n = \begin{cases} 7, & \text{wenn } n \leq 10, \\ 1+\frac{1}{n}, & \text{wenn } n > 10 \text{ Primzahl}, \\ 4-\frac{1}{n^2}, & \text{wenn } n > 10 \text{ keine Primzahl}. \end{cases}$$

Diese Folge divergiert aber die Folge ist offensichtlich beschränkt. Wir betrachten zuerst die Teilfolge, welche den geradzahligen Indizes entspricht. D.h. wir betrachten die Teilfolge

$$(a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, a_{12}, a_{14}, a_{16}, \dots) \quad = \quad (7, 7, 7, 7, 7, 4-\tfrac{1}{12^2}, 4-\tfrac{1}{14^2}, 4-\tfrac{1}{16^2}, \dots).$$

Diese konvergiert offensichtlich gegen 4. Wir können aber auch die Teilfolge betrachten, welche durch die "Primzahl-Indizes" gegeben ist. D.h. wir betrachten die Teilfolge

$$(a_2, a_3, a_5, a_7, a_{11}, a_{13}, a_{17}, \dots) \quad = \quad (7, 7, 7, 7, 1\tfrac{1}{11}, 1\tfrac{1}{13}, 1\tfrac{1}{17}, 1\tfrac{1}{19}, \dots)$$

Diese konvergiert offensichtlich gegen 1. Wir haben in diesem Fall also zwei konvergente Teilfolgen gefunden, welche gegen zwei verschiedene Grenzwerte konvergieren.

Beweis. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Es existieren also $x_1 \leq y_1 \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \in [x_1, y_1]$.

Behauptung. Es gibt eine Folge von Intervallen $[x_k, y_k]$, $k \geq 2$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

(1) $[x_k, y_k]$ ist ein Teilintervall von $[x_{k-1}, y_{k-1}]$ von halber Länge, und
(2) $[x_k, y_k]$ enthält unendlich viele Folgenglieder.

Wir betrachten zuerst den Fall $k = 2$. Es sei $z := \frac{x_1+y_1}{2}$ der Mittelpunkt des Intervalls $[x_1, y_1]$. Nachdem $[x_1, y_1] = [x_1, z] \cup [z, y_1]$ und nachdem $[x_1, y_1]$ unendlich viele Folgenglieder enthält gilt:

(a) das Intervall $[x_1, z]$ enthält unendlich viele Folgenglieder, oder
(b) das Intervall $[z, y_1]$ enthält unendlich viele Folgenglieder.[46]

Wir betrachten nun das Intervall

$$[x_2, y_2] \;:=\; \begin{cases} [x_1, z], & \text{falls } [x_1, z] \text{ unendlich viele Folgenglieder enthält,} \\ [z, y_1], & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Wir definieren jetzt das nächste Intervall $[x_3, y_3]$ mit dem gleichen Verfahren: Wir wiederum zerlegen $[x_2, y_2]$ wiederum in zwei Hälften. Wir wählen die erste Hälfte, wenn diese unendlich viele Folgenglieder enthält, ansonsten nehmen wir die zweite Hälfte. Indem wir dieses Verfahren iterieren, erhalten wir die gewünschte Folge von Intervallen. ⊞

Wir werden jetzt eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konstruieren, so dass jedes Folgenglied a_{n_k} im Intervall $[x_k, y_k]$ liegt. Wir definieren diese Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt: Wir setzen

$$n_1 \;:=\; 1.$$

Iterativ definieren wir dann [47]

$$\begin{aligned} n_2 \;&:=\; \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, n > n_1 \text{ und } a_n \in [x_2, y_2]\} \\ n_3 \;&:=\; \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, n > n_2 \text{ und } a_n \in [x_3, y_3]\} \\ &\vdots \\ n_k \;&:=\; \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, n > n_{k-1} \text{ und } a_n \in [x_k, y_k]\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Behauptung. Die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ folgt, dass es genügt zu zeigen, dass die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Zur Erinnerung, per Definition gilt:

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Cauchy-Folge} \quad\Longleftrightarrow\quad \underset{\epsilon>0}{\forall}\; \underset{K\in\mathbb{N}}{\exists}\; \underset{k,l\geq K}{\forall} |a_{n_k} - a_{n_l}| < \epsilon.$$

Es sei also $\epsilon > 0$. Wir führen folgende Vorüberlegungen durch:

(1) Wir setzen $d := y_1 - x_1$, d.h. d ist die Länge vom ersten Intervall $[x_1, y_1]$. Nachdem wir die Länge des Intervalls bei jedem Schritt halbiert haben, folgt, dass die Länge des Intervalls $[x_k, y_k]$ gegeben ist durch $\frac{1}{2^{k-1}} \cdot d$.

---

[46] Es können auch beide Intervalle unendlich viele Folgenglieder enthalten.

[47] Der Satz "es sei M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, wir definieren $n := \min(M)$" ist a priori etwas gefährlich, weil diese Definition nur Sinn macht, wenn M nicht die leere Menge ist. Wenn wir also schreiben, "es sei $n := \min(M)$", dann müssen wir immer überprüfen, dass die Menge nichtleer ist. In unserem Fall ist dies in der Tat der Fall, die Mengen $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n > n_{k-1} \text{ und } a_n \in [x_k, y_k]\}$ sind nichtleer, weil nach Konstruktion jedes Intervall $[x_k, y_k]$ unendlich viele Folgenglieder enthält.

(2) Aus dem Los Alamos Satz 3.9 folgt, dass $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \cdot d = 0$. Es existiert also insbesondere ein $K \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{2^{K-1}} \cdot d < \epsilon$.

Es seien $k, l \geq K$ gegeben. Dann gilt

$$|a_{n_k} - a_{n_l}| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{aus } k,l \geq K \text{ folgt, dass}\\ a_{n_k},\, a_{n_l} \in [x_K, y_K]}}{\leq} \text{Länge von } [x_K, y_K] \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Konstruktion von } [x_K, y_K]}}{=} \frac{1}{2^{K-1}} \cdot d \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Wahl von } K}}{<} \epsilon.$$

■

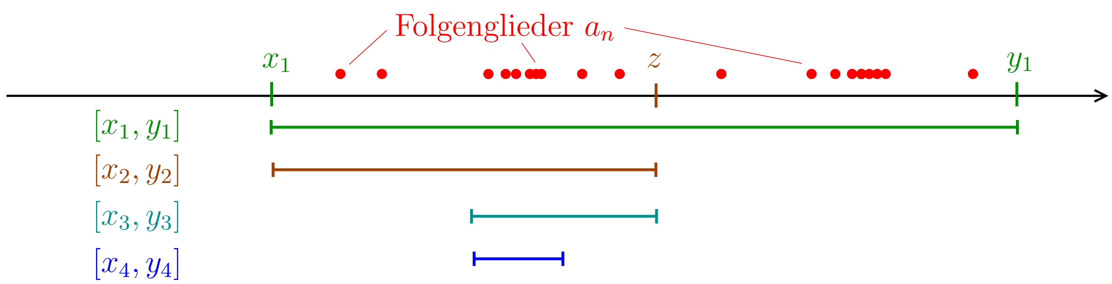


Abbildung 15. Illustration für den Beweis vom Satz von Bolzano-Weierstraß.

6. Konvergenz von Reihen

6.1. **Erinnerung an Reihen.** Wir erinnern im Folgenden noch einmal an den Begriff der Reihe. Wir werden diesen Begriff in diesem Kapitel ausführlichst behandeln. Es ist dabei hilfreich den ursprünglich Begriff der Reihe, welchen wir in Teilkapitel 3.4 eingeführt hatten, etwas zu erweitern.

Definition. Es sei $w \in \mathbb{N}_0$ und es sei $(a_n)_{n\geq w}$ eine Folge von reellen Zahlen.[48]

(1) Für $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$\textit{k-te Partialsumme der Folge } (a_n)_{n\geq w} \;:=\; \sum_{n=w}^{w+k} a_n \;=\; a_w + a_{w+1} + \cdots + a_{w+k}.$$

(2) Wir definieren

$$\begin{aligned}\textit{Reihe } \sum_{n\geq w} a_n &:= \text{Folge der Partialsummen der Folge } (a_n)_{n\geq w} \\ &= \text{Folge } (a_w,\, a_w+a_{w+1},\, a_w+a_{w+1}+a_{w+2}, \ldots) = \text{Folge } \begin{array}{l} a_w \\ a_w+a_{w+1} \\ a_w+a_{w+1}+a_{w+2} \\ \vdots \end{array}\end{aligned}$$

Wir nennen die Zahlen a_n die *Glieder der Reihe*.

(3) *Wenn* die Reihe $\sum\limits_{n\geq w} a_n$ konvergiert, d.h. wenn die Folge der Partialsummen konvergiert, dann schreiben wir

$$\sum_{n=w}^{\infty} a_n \quad:=\quad \text{Grenzwert der Reihe } \sum_{n\geq w} a_n \quad:=\quad \lim_{k\to\infty} \sum_{n=w}^{w+k} a_n.$$

Der Grenzwert der Reihe wird oft auch nur als *Wert der Reihe* bezeichnet. Zudem schreiben wir auch kurz:

$$\sum_{n=w}^{\infty} a_n \;:=\; \pm\infty, \qquad \text{wenn die Reihe } \sum_{n\geq w} a_n \text{ bestimmt gegen } \pm\infty \text{ divergiert.}$$

Wir erinnern an folgenden Satz.

Satz. 3.16 *Für jedes $z \in \mathbb{R}$ gilt:*[49]

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{1-z}, & \textit{falls } |z| < 1, \\ +\infty, & \textit{falls } z \geq 1, \\ \text{divergiert}, & \textit{falls } z \leq -1. \end{cases}$$

Wir erinnern auch noch an folgenden Satz.[50]

---

[48] In Teilkapitel 3.4 hatten wir nur den Fall $w = 0$ betrachtet.

[49] Die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$ hatten wir *geometrische Reihe* genannt.

[50] Streng genommen hatten wir damals den Satz der Einfachheit halber nur für $w = 0$ formuliert. Der allgemeine Fall wird natürlich genauso bewiesen wie der Fall $w = 0$.

Satz. 3.17 *Es seien* $\sum\limits_{n\geq w} a_n$ *und* $\sum\limits_{n\geq w} b_n$ *zwei Reihen, welche konvergieren, oder welche bestimmt divergieren. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) $$\sum_{n=w}^{\infty}(a_n+b_n) \;=\; \sum_{n=w}^{\infty} a_n \;{\color{red}+}\; \sum_{n=w}^{\infty} b_n,$$ wenn *die Summe "+" auf der rechten Seite in der Tabelle auf Seite 42 definiert wurde.*

(2) *Für* $\lambda\in\mathbb{R}$ *gilt* $$\sum_{n=w}^{\infty}\lambda\cdot a_n \;=\; \lambda\cdot\sum_{n=w}^{\infty} a_n.$$

(3) *Wenn* $a_n\leq b_n$ *für alle* $n\in\mathbb{N}_{\geq w}$*, dann gilt*
$$\sum_{n=w}^{\infty} a_n \;\leq\; \sum_{n=w}^{\infty} b_n.$$

Mithilfe von Satz 3.17 können wir folgendes Lemma beweisen.

Lemma 6.1. *Es seien* $(a_n)_{n\geq w}$ *und* $(b_n)_{n\geq w}$ *zwei Folgen. Wenn sich die Folgen nur in endlich vielen Folgengliedern unterscheiden, dann konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{n\geq w} a_n$ *genau dann, wenn die Reihe* $\sum\limits_{n\geq w} b_n$ *konvergiert.*

Beispiel. Für $n\in\mathbb{N}_0$ betrachten wir die Folgen
$$a_n \;:=\; \begin{cases} 10^{10}, & \text{wenn } n\leq 1524,\\ 2^{-n}, & \text{wenn } n>1524\end{cases} \qquad \text{und} \qquad b_n \;:=\; 2^{-n}.$$
Die beiden Folgen unterscheiden sich in genau 1525 Gliedern. Es folgt aus Satz 3.16, dass die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} b_n=\sum\limits_{n\geq 0}2^{-n}=\sum\limits_{n\geq 0}(\frac{1}{2})^n$ konvergiert. Es folgt nun aus Lemma 6.1, dass die etwas mysteriösere Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ ebenfalls konvergiert.

Beweis $(*)$. Es seien $\sum\limits_{n\geq w} a_n$ und $\sum\limits_{n\geq w} b_n$ zwei Reihen, welche sich nur in endlich vielen Reihengliedern unterscheiden. Nachdem die Aussage des Korollars symmetrisch ist, genügt es folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung. Wenn $\sum\limits_{n\geq w} a_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum\limits_{n\geq w} b_n$.

Wir setzen $c_n:=b_n-a_n$. Die Folge $(c_n)_{n\geq w}$ besitzt nach Voraussetzung nur endlich viele Folgenglieder, welche von 0 verschieden sind. Die Reihe $\sum\limits_{n\geq w} c_n$ ist daher ab einem gewissen Folgenglied konstant. Insbesondere konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n\geq w} c_n$. Es folgt nun aus Satz 3.17 (1), dass auch die Reihe $\sum\limits_{n\geq w}(a_n+c_n)=\sum\limits_{n\geq w} b_n$ konvergiert. ■

Nachdem wir jetzt Reihen mit "verschiedenen Anfängen" betrachten, wollen wir noch zeigen, dass der "Anfangspunkt" für die Konvergenz einer Reihe keine Rolle spielt. Genauer gesagt, wir haben folgendes Lemma.

Lemma 6.2. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von reellen Zahlen und es sei $w \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$\sum_{n\geq 0} a_n \text{ konvergiert} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n\geq w} a_n \text{ konvergiert.}$$

Im Falle der Konvergenz gilt zudem:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n}_{\text{Wert der Reihe}} = \underbrace{\sum_{n=0}^{w-1} a_n}_{\text{endliche Summe}} + \underbrace{\sum_{n=w}^{\infty} a_n}_{\text{Wert der Reihe}}.$$

Beweis. Das Lemma folgt leicht aus den Definitionen. Wir überlassen es daher der Leserschaft den Beweis aufzuschreiben. ■

6.2. **Konvergenzkriterien für Reihen.** Im Folgenden wollen wir verschiedene notwendige und hinreichende Kriterien für die Konvergenz von Reihen kennenlernen. Wir beginnen mit einem notwendigen Kriterium für die Konvergenz.

Satz 6.3. (Nullfolgen-Kriterium) *Wenn eine Reihe $\sum\limits_{n\geq w} a_n$ konvergiert, dann bilden die Reihenglieder a_n eine Nullfolge.*

Beweis. Um die Notation zu vereinfachen betrachten wir nur den Fall $w = 0$. Es sei also $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ eine konvergente Reihe. Nach Voraussetzung konvergiert die Folge der Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{wobei } n \in \mathbb{N}_0.$$

Wir wollen zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, d.h. wir wollen zeigen

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall}\ |a_n| < \epsilon.$$

Es sei also $\epsilon > 0$.

> Wir haben also Informationen über das Verhalten der Partialsummen, brauchen nun aber Informationen über die a_n selber. Per Definition ist $a_n = s_n - s_{n-1}$. Wir müssen nun also die Differenzen $s_n - s_{n-1}$ kontrollieren. Dies schaffen wir dadurch, dass wir uns daran entsinnen, dass nach Satz 4.1 die Konvergenz der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bedeutet, dass diese Folge insbesondere eine Cauchy-Folge ist.

Es folgt aus der Voraussetzung und Satz 4.1, dass die Partialsummen $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ eine Cauchy-Folge bilden. Insbesondere gibt es also ein $M \in \mathbb{N}$, so dass:

$$\text{für alle } n, m \geq M \text{ gilt} \quad |s_n - s_m| < \epsilon.$$

Daraus folgt: $\quad$ für alle $n \geq N := M + 1$ gilt $\quad |a_n| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{es ist } s_n - s_{n-1} = a_n, \text{ denn alle anderen Terme von } s_n - s_{n-1} \text{ heben sich weg}}}{=} |s_n - s_{n-1}| < \epsilon.$ ■

Satz 6.4. *Es sei* $(a_n)_{n\geq w}$ *eine Folge, so dass für alle* $n \in \mathbb{N}_{\geq w}$ *gilt:* $a_n \geq 0$.

(1) *Wenn die Folge der Partialsummen unbeschränkt ist, dann gilt* $\sum\limits_{n=w}^{\infty} a_n = +\infty$.

(2) *Wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist, dann konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{n\geq w} a_n$.

Beweis. Nachdem alle Folgenglieder $a_n \geq 0$ folgt, dass die Folge der Partialsummen

$$\left(\sum_{n=w}^{w+k} a_n\right)_{k\in\mathbb{N}_0} = (a_w, a_w + a_{w+1}, a_w + a_{w+1} + a_{w+2}, \dots)$$

monoton steigend ist. Der Satz folgt nun sofort aus Satz 3.15 und dem Konvergenzsatz 4.3. ■

Definition. Wir bezeichnen die Reihe

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \left(1,\ 1 + \tfrac{1}{2},\ 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3},\ 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4},\ \dots\right)$$

als die *harmonische Reihe.*

Der folgende Satz zeigt unter Anderem, dass die Umkehrung des Nullfolgen-Kriteriums 6.3 nicht gilt.

Satz 6.5. (Divergenz der harmonischen Reihe) *Die harmonische Reihe divergiert bestimmt gegen* $+\infty$*, d.h.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Beweis. Nachdem alle Reihenglieder $\frac{1}{n}$ positiv sind, genügt es nach Satz 6.4 folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Die Folge der Partialsummen $s_k := \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$ ist unbeschränkt.

Wir betrachten im Folgenden die Partialsummen, welche zur Zweierpotenz $k = 2^m$ gehören. Wir führen folgende Abschätzung durch:

$$\begin{aligned} s_k = s_{2^m} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^m} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{=4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^m}}_{=2^{m-1}\cdot\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2}} = 1 + \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass die Partialsummen beliebig groß werden können. Insbesondere ist die Folge der Partialsummen nicht beschränkt. ■

Für einen festen Exponenten $d \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^d}$. Wenn $d = 1$, dann erhalten wir die harmonische Reihe, welche, wie wir gerade gesehen hatten, divergiert. Der nächste Satz besagt nun, dass die Reihe konvergiert, sobald der Exponent $d \geq 2$ ist.

Satz 6.6. *Für jedes $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 2$ konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^d}$.

Beweis. Nachdem alle Reihenglieder $\frac{1}{n^d}$ positiv sind, genügt es nach Satz 6.4 folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Die Folge der Partialsummen $s_k := \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{1}{n^d}$ ist beschränkt.

Es sei also $k \in \mathbb{N}$. Wir wählen ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $2^{m+1} - 1 \geq k$. Dann gilt [51]

$$\begin{aligned}
0 \leq s_k &\leq s_{2^{m+1}-1} = \sum_{n=1}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{n^d} \\
&= 1 + \frac{1}{2^d} + \frac{1}{3^d} + \frac{1}{4^d} + \frac{1}{5^d} + \frac{1}{6^d} + \frac{1}{7^d} + \ldots + \frac{1}{(2^m)^d} + \cdots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^d} \\
&\leq 1 + \underbrace{\frac{1}{2^d} + \frac{1}{2^d}}_{=\frac{2}{2^d}} + \underbrace{\frac{1}{4^d} + \frac{1}{4^d} + \frac{1}{4^d} + \frac{1}{4^d}}_{=\frac{4}{4^d}=\frac{2^2}{(2^2)^d}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{(2^m)^d} + \cdots + \frac{1}{(2^m)^d}}_{=\frac{2^m}{(2^m)^d}} \\
&= 1 + \frac{2}{2^d} + \frac{(2^2)}{(2^2)^d} + \cdots + \frac{2^m}{(2^m)^d} = \sum_{i=0}^{m} \frac{2^i}{(2^i)^d} = \sum_{i=0}^{m} 2^i \cdot 2^{-id} = \sum_{i=0}^{m} \left(2^{-d+1}\right)^i \\
&\underset{\uparrow}{=} \frac{1-(2^{-d+1})^{m+1}}{1-2^{-d+1}} \leq \frac{1}{1-2^{-d+1}}.
\end{aligned}$$

nach Satz 2.2 angewandt auf $x = 2^{-d+1}$, hierbei verwenden wir, dass aus $d > 1$ folgt, dass $1 - 2^{-d+1} \neq 0$

Wir haben also gezeigt, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt: $s_k \in [0, \frac{1}{1-2^{-d+1}}]$. Insbesondere haben wir damit bewiesen, dass die Folge der Partialsummen beschränkt ist. ∎

Bemerkung. Satz 6.6 besagt also insbesondere, dass die Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, aber der Satz sagt nichts über den Grenzwert der Reihe aus. Als Appetitanreger wollen wir jetzt schon mal erwähnen, dass wir ganz am Ende der Vorlesung sehen werden, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Aber um dies zu beweisen, werden wir erst mal π mathematisch präzise einführen müssen. Dies geschieht in einem späteren Kapitel.

Satz 6.7. (Leibniz-Kriterium) *Es sei $(a_n)_{n\geq w}$ eine monoton fallende Folge. Wenn gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, dann konvergiert die alternierende*[52] *Reihe*

$$\sum_{n\geq w} (-1)^n \cdot a_n.$$

[51] Das Argument ähnelt auf dem ersten Blick dem Beweis von Satz 6.5, aber in diesem Fall schätzen wir *nach oben* ab, während wir im Beweis von Satz 6.5 nach *unten abgeschätzt* hatten.

[52] Die Reihe $\sum\limits_{n\geq w} (-1)^n \cdot a_n$ heißt alternierend, weil die Reihenglieder mit alternierenden Vorzeichen auftauchen.

Beispiel. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Folge, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. In Abbildung 16 versuchen wir die Partialsummen $a_0, a_0 - a_1, a_0 - a_1 + a_2, \ldots$ zu illustrieren.

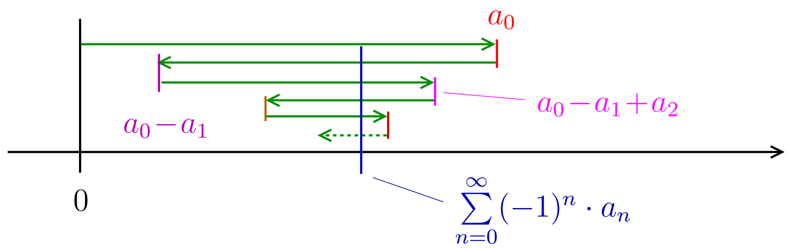


Abbildung 16. Illustration des Leibniz-Kriteriums.

Beispiel. Es folgt beispielsweise aus dem Leibniz-Kriterium, dass die Reihe

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

konvergiert. Das Leibniz-Kriterium gibt uns aber keine Aussage über den Grenzwert. Ganz am Ende der Vorlesung Analysis I werden wir sehen, dass der Grenzwert der Reihe $-\ln(2)$ beträgt. Aber bevor wir diese Aussage beweisen können, müssen wir sowieso erst noch den natürlichen Logarithmus einführen.

Bemerkung. Es sei $(a_n)_{n\geq w}$ eine monoton fallende Folge, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Es folgt aus der Bemerkung auf Seite 53, dass für alle $n \geq w$ gilt $a_n \geq 0$.

Beweis. Um die Notation etwas zu vereinfachen betrachten wir den Fall $w = 0$. Wie üblich bezeichnen wir mit

$$s_n \;:=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot a_k$$

die n-te Partialsumme der Reihe. Es folgt aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, dass es genügt zu zeigen, dass die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Partialsummen eine Cauchy-Folge ist. Mit anderen Worten, wir wollen folgende Aussage beweisen:

$$(*) \qquad\qquad \underset{\epsilon>0}{\forall} \;\; \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \;\; \underset{n,m\geq N}{\forall} \; |s_n - s_m| < \epsilon.$$

Wir müssen nun also die Differenzen $|s_n - s_m|$ zielführend abschätzen.

Behauptung. Für $n \geq m \in \mathbb{N}$ gilt $s_n - s_m \in [-a_{m+1}, a_{m+1}]$.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass n ungerade und m ungerade sind. In diesem Fall gilt:

die Vorzeichen erhalten wir aus der Voraussetzung, dass n ungerade und m ungerade

$$s_n - s_m \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=m+1}^{n} (-1)^i \cdot a_i \overset{\downarrow}{=} \underbrace{a_{m+1} - a_{m+2}}_{\geq 0,\text{ weil monoton fallend}} + \ldots + \underbrace{a_{n-1} - a_n}_{\geq 0,\text{ weil monoton fallend}} \;\geq\; 0.$$

alle anderen Terme der Partialsummen heben sich weg

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} s_n - s_m &= \sum_{i=m+1}^{n} (-1)^i \cdot a_i \underset{\text{da } n \text{ ungerade und } m \text{ ungerade}}{=} a_{m+1} \underbrace{-a_{m+2} + a_{m+3}}_{\leq 0, \text{ weil monoton fallend}} \dots \underbrace{-a_{n-2} + a_{n-1}}_{\leq 0, \text{ weil monoton fallend}} - a_n \\ &\leq a_{m+1} - a_n \underset{\text{nach der Bemerkung vor dem Beweis gilt } a_n \geq 0}{\leq} a_{m+1}. \end{aligned}$$

Wir haben also bewiesen, dass in diesem Fall gilt, dass $s_n - s_m \in [0, a_{m+1}]$. Ganz ähnlich zeigt man auch:

(1) Wenn n gerade und m ungerade, dann ist ebenfalls $s_n - s_m \in [0, a_{m+1}]$.
(2) Wenn n beliebige und m gerade, dann ist $s_n - s_m \in [-a_{m+1}, 0]$. ⊞

Mit dieser Behauptung beweist sich die gewünschte Aussage $(*)$ fast von selbst. In der Tat, sei $\epsilon > 0$. Nachdem $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Es seien nun $n, m \geq N$. Nachdem $|s_n - s_m| = |s_m - s_n|$ können wir o.B.d.A. annehmen, dass $n \geq m$. Dann gilt

$$|s_n - s_m| \underset{\text{folgt aus der Behauptung}}{\leq} |a_{m+1}| \underset{\text{da } m+1 \geq N}{<} \epsilon.$$

■

Satz 6.8. (Majoranten-Kriterium) *Es seien $(a_n)_{n\geq w}$ und $(b_n)_{n\geq w}$ zwei Folgen. Dann gilt*

$$b_n \geq |a_n| \text{ für alle } n \quad \text{und} \quad \sum_{n\geq w} b_n \text{ konvergiert} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq w} a_n \text{ konvergiert.}$$

Beispiel. Wir wollen zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+2}$$

konvergiert. Wir setzen $a_n = \frac{1}{n^2+2}$ und $b_n = \frac{1}{n^2}$. Offensichtlich gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^2+2}$. Satz 6.6 besagt, dass die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. Es folgt nun also aus dem Majoranten-Kriterium 6.8, dass auch unsere ursprüngliche Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+2}$ konvergiert.

Beweis. Um die Notation zu vereinfachen nehmen wir an, dass $w = 0$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ betrachten wir die Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \text{und} \qquad t_n := \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Nachdem eine Reihe konvergiert genau dann, wenn die Partialsummen eine Cauchy-Folge bilden müssen wir also folgende Aussage beweisen:

$$b_n \geq |a_n| \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \underset{\epsilon>0}{\forall} \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \underset{n,m\geq N}{\forall} |t_n - t_m| < \epsilon \Longrightarrow \underset{\epsilon>0}{\forall} \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \underset{n,m\geq N}{\forall} |s_n - s_m| < \epsilon.$$

Es sei also $\epsilon > 0$ gegeben. Nach Voraussetzung existiert ein ein $N \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle $n \geq m \geq N$ gilt $|t_n - t_m| < \epsilon$. Dann gilt aber auch für alle $n \geq m \geq N$, dass

$$|s_n - s_m| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{alle anderen Terme}\\ \text{heben sich weg}}}{=} \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Dreiecksungleichung}}}{\leq} \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Voraussetzung}}}{\leq} \sum_{k=m+1}^{n} b_k = |t_n - t_m| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Wahl von } N}}{<} \epsilon.$$

■

Korollar 6.9. (Minoranten-Kriterium) *Es seien $(a_n)_{n\geq w}$ und $(b_n)_{n\geq w}$ zwei Folgen. Dann gilt*

$$|a_n| \leq b_n \text{ für alle } n \quad \text{und} \quad \sum_{n\geq w} a_n \text{ divergiert} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq w} b_n \text{ divergiert.}$$

Beispiel.

Da $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ für alle n und da $\underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ divergiert}}_{\text{dies wissen wir aus Satz 6.5}}$ folgt aus dem Minoranten-Krit.: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert.

Beweis (∗). Wie wir gleich sehen werden ist das Minoranten-Kriterium eigentlich nur eine Umformulierung des Majoranten-Kriteriums. Es seien also $(a_n)_{n\geq w}$ und $(b_n)_{n\geq w}$ zwei Folgen, so dass für alle n gilt, dass $|a_n| \leq b_n$. Das Majoranten-Kriterium besagt:

$$\sum_{n\geq w} b_n \text{ konvergiert} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq w} a_n \text{ konvergiert.}$$

Aus dem Prinzip der Kontraposition erhalten wir folgende Aussage:

$$\sum_{n\geq w} b_n \text{ divergiert} \quad \Longleftarrow \quad \sum_{n\geq w} a_n \text{ divergiert.}$$

Das ist genau die Aussage, welche wir beweisen wollten. ■

6.3. Absolute Konvergenz von Reihen und das Quotienten-Kriterium.

Definition. Eine Reihe $\sum\limits_{n\geq w} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum\limits_{n\geq w} |a_n|$ über die Absolutbeträge konvergiert.

Beispiel. Wir betrachten die Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$. Es folgt aus dem Leibniz-Kriterium, dass diese Reihe konvergiert. Aber die Reihe konvergiert *nicht absolut*, weil wir in Satz 6.5 gesehen hatten, dass die Reihe

$$\sum_{n\geq 1} \left|(-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

divergiert.

Der folgende Satz besagt insbesondere, dass jede absolut konvergente Reihe konvergiert.

Satz 6.10. *Es sei* $(a_n)_{n\geq w}$ *eine Folge. Wenn die Reihe* $\sum\limits_{n\geq w} |a_n|$ *über die Absolutbeträge konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe* $\sum\limits_{n\geq w} a_n$*. Zudem gilt dann, dass*

$$\left|\sum_{n=w}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=w}^{\infty} |a_n|.$$

Beispiel. Wir betrachten die Folge

$$a_n := \begin{cases} -\frac{1}{n^2}, & \text{wenn } n \text{ Primzahl,} \\ \frac{1}{n^2}, & \text{wenn } n \text{ keine Primzahl.} \end{cases}$$

Es folgt aus Satz 6.6 und aus Satz 6.10, dass die Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ konvergiert.

Beweis. Es sei $\sum\limits_{n\geq w} a_n$ eine Reihe, so dass die Reihe $\sum\limits_{n\geq w} |a_n|$ über die Absolutbeträge konvergiert. Wir wenden das Majoranten-Kriterium 6.8 auf $b_n := |a_n|$ an und erhalten daraus sofort, dass auch die ursprüngliche Reihe $\sum\limits_{n\geq w} a_n$ konvergiert. Für die Grenzwerte der Reihen gilt zudem:

$$\left|\sum_{n=w}^{\infty} a_n\right| = \left|\lim_{k\to\infty} \sum_{n=w}^{k} a_n\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ganz allgemein gilt } \left|\lim\limits_{k\to\infty} x_k\right| = \lim\limits_{k\to\infty} |x_k|}}{=} \lim_{k\to\infty} \left|\sum_{n=w}^{k} a_n\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungleichung und Satz 3.14}}}{\leq} \lim_{k\to\infty} \sum_{n=w}^{k} |a_n| = \sum_{n=w}^{\infty} |a_n|$$

■

Satz 6.11. (Quotienten-Kriterium) *Es sei* $(a_n)_{n\geq w}$ *eine Folge von reellen Zahlen mit* $a_n \neq 0$*, so dass der Grenzwert*

$$\Theta := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

existiert.

(1) *Wenn* $\Theta < 1$*, dann konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{n\geq w} a_n$ *absolut. (Insbesondere konvergiert dann nach Satz 6.10 auch die Reihe* $\sum\limits_{n\geq w} a_n$*.)*

(2) *Wenn* $\Theta > 1$*, dann divergiert die Reihe* $\sum\limits_{n\geq w} a_n$*.*

Beispiel.

(1) Wir betrachten die Folge $a_n = \frac{n+1}{5^n}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{5(n+1)} = \frac{1}{5}.$$

Es folgt also aus Satz 6.11, dass die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n+1}{5^n}$ absolut konvergiert und insbesondere auch "ganz normal" konvergiert.

(2) Es sei $x \in (-1, 1)$ mit $x \neq 0$. Wir betrachten noch einmal die geometrische Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$, d.h. wir betrachten $a_n = x^n$. Dann ist $\Theta := \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x|$. Es folgt also aus Satz 6.11, dass die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$ konvergiert. Diese Aussage hatten wir natürlich schon in Satz 3.16 bewiesen.

(3) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^k}$. In diesem Fall ist

$$\Theta \;:=\; \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \;=\; \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^k}{(n+1)^k}\right| \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^k} \;=\; 1.$$

Wenn $k = 1$, dann divergiert die Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^k} = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ nach Satz 6.5. Hingegen wenn $k = 2$, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^k} = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ nach Satz 6.6. Wir sehen also, wenn $\Theta = 1$, dann kann man keine allgemein gültige Aussage treffen.

Beweis von Satz 6.11 (1). Um die Notation etwas zu vereinfachen betrachten wir nur den Fall $w = 0$. Es sei also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von reellen Zahlen $a_n \neq 0$, so dass

$$\Theta \;=\; \lim_{n\to\infty} \left|\tfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \;<\; 1.$$

Wir müssen zeigen, dass die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n|$ konvergiert.

> Das obige Beispiel der geometrischen Reihe legt nahe, dass unsere jetzige Reihe einer geometrischen Reihe "ähnelt". Der Gedanke ist jetzt die Konvergenz unserer Reihe mithilfe der schon bekannten Konvergenz von geometrischen Reihen und dem Majoranten-Kriterium zu beweisen.

Nachdem $\Theta < 1$ können wir ein $\lambda \in (\Theta, 1)$ wählen. Es folgt aus der Definition von $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \Theta$, angewandt auf $\epsilon = \lambda - \Theta > 0$, dass es ein $N \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in (\Theta - \epsilon, \underbrace{\Theta + \epsilon}_{=\lambda}), \;\text{ insbesondere }\; \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \lambda, \;\text{ woraus folgt, dass }\; |a_{n+1}| \leq \lambda \cdot |a_n|.$$

Indem wir die letzte Ungleichung mehrmals anwenden erhalten wir für beliebiges $n \geq N$ folgende Ungleichung:

$$(*) \qquad |a_n| \;\leq\; \lambda \cdot |a_{n-1}| \;\leq\; \lambda^2 \cdot |a_{n-2}| \;\leq\; \ldots \;\leq\; \lambda^{n-N} \cdot |a_N| \;=\; \lambda^n \cdot \underbrace{\lambda^{-N} \cdot |a_N|}_{=:C}.$$

Zusammengefasst haben wir also folgende Aussage bewiesen:

Aussage. Es gibt ein $\lambda \in [0, 1)$, ein $C \in \mathbb{R}$ und ein $N \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n| \leq \lambda^n \cdot C$.

Mit dieser Aussage ist es nun ein Leichtes zu beweisen, dass die Reihe $\sum_{n\geq 0}|a_n|$ konvergiert:

(1) Nachdem $\lambda\in[0,1)$ folgt aus Satz 3.16 und Lemma 6.2, dass die Reihe $\sum_{n\geq N}\lambda^n\cdot C$ konvergiert.
(2) Es folgt aus (1) und der Aussage, zusammen mit Majoranten-Kriterium, dass die Reihe $\sum_{n\geq N}|a_n|$ konvergiert.
(3) Es folgt aus (2) und Lemma 6.2, dass die Reihe $\sum_{n\geq 0}|a_n|$ konvergiert. ■

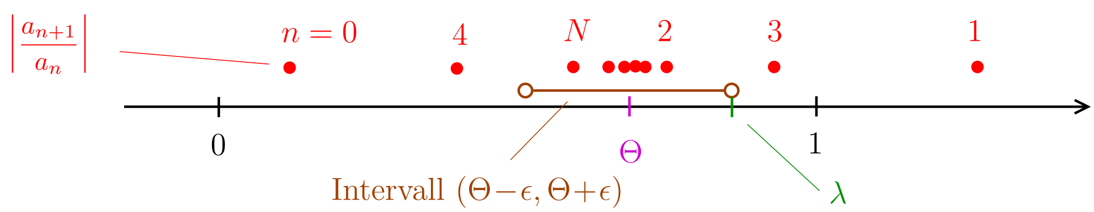


Abbildung 17. Abbildung zum Beweis von Satz 6.11.

Beweis von Satz 6.11 (2). Um die Notation etwas zu vereinfachen betrachten wir wiederum nur den Fall $w=0$. Es sei also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von reellen Zahlen $a_n\neq 0$, so dass

$$\Theta \;=\; \lim_{n\to\infty}\left|\tfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \;>\; 1.$$

Wir müssen zeigen, dass die Reihe $\sum_{n\geq 0}|a_n|$ divergiert. Wir wählen ein $\lambda\in(1,\Theta)$. Ganz analog zum Beweis von (1) sieht man, dass es ein $N\in\mathbb{N}_0$ gib, so dass für beliebiges $n\geq N$ gilt $|a_n|\geq\lambda^{n-N}\cdot|a_N|$. Daraus folgt schon, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge ist. Also folgt aus dem Nullfolgen-Kriterium 6.3, dass die Reihe $\sum\limits_{n\geq w}a_n$ divergiert. ■

6.4. **Umordnung von Reihen.** Bevor wir zum eigentlichen Thema dieses Teilkapitels schreiten wollen wir noch folgende suggestive Notation einführen.

Notation. Für eine konvergente Reihe $\sum_{n\geq 1}a_n$ schreiben wir

$$a_1+a_2+a_3+\ldots \;:=\; \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}a_n \;=:\; \sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

Beispiel. Es ist

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}+\cdots=\lim_{k\to\infty}k\text{-te Partialsumme}=\lim_{k\to\infty}\begin{cases}\frac{1}{m+2}, & \text{wenn } k=2m+1\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}=0.$$

Jetzt wenden wir uns dem eigentlichen Thema des Teilkapitels zu. Es folgt aus dem Kommutativgesetz, dass es egal ist, in welcher Reihenfolge wir endlich viele reelle Zahlen addieren. Beispielsweise gilt

$$a_1 + a_2 + a_3 \;=\; a_3 + a_1 + a_2 \;=\; a_2 + a_3 + a_1.$$

Etwas allgemeiner, wenn $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ endlich viele reelle Zahlen sind, und wenn zudem $\tau\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ eine Bijektion ist, dann gilt

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \;=\; a_{\tau(1)} + a_{\tau(2)} + a_{\tau(3)} + \dots + a_{\tau(n)}.$$

Es stellt sich die Frage, ob die "naive" Verallgemeinerung dieser Aussage auf Reihen ebenfalls gilt. Dies führt uns zu folgender Definition.

Definition. Es sei $\sum\limits_{n\ge w} a_n$ eine Reihe und es sei $\tau\colon \mathbb{N}_{\ge w} \to \mathbb{N}_{\ge w}$ eine Bijektion. Wir nennen die Reihe $\sum\limits_{n\ge w} a_{\tau(n)}$ eine *Umordnung von* $\sum\limits_{n\ge w} a_n$.

Es stellt sich also die Frage, ob Umordnungen die Konvergenz und den Grenzwert einer Reihe abändern können. Das folgende Beispiel bejaht diese Frage.

Beispiel. Wir betrachten noch einmal die obige Reihe. Wir hatten gesehen, dass

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \dots \;=\; 0.$$

Wir betrachten nun jedoch folgende Umordnung:[53]

$$\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}}_{>0} + \dots$$

Wir sehen also, dass alle Partialsummen dieser Reihe $\ge \frac{1}{2}$ sind. Insbesondere wird diese Reihe definitiv nicht gegen 0 konvergieren. D.h. die umgeordnete Reihe konvergiert nicht gegen den Grenzwert der ursprünglichen Reihe.

Wir haben also gesehen, dass Umordnungen sehr wohl den Grenzwert abändern können. Es gilt sogar folgende ganz allgemeine Aussage:

Satz 6.12. (Riemannscher Umordnungssatz) *Es sei* $\sum\limits_{n\ge w} a_n$ *eine Reihe welche konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.*[54]

(1) *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Umordnung, so dass die umgeordnete Reihe gegen x konvergiert.*

---

[53]Wir können die Umordnung auch präzise mithilfe einer Bijektion $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ angeben. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \tau\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1, \\ 4m+3, & \text{falls es ein } m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n = 3m+2 \text{ gibt,} \\ 4m+5, & \text{falls es ein } m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n = 3m+3 \text{ gibt,} \\ 2m+2, & \text{falls es ein } m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n = 3m+4 \text{ gibt.} \end{cases} \end{aligned}$$

Man kann leicht nachweisen, dass dies ist eine Bijektion ist. Wenn wir die ursprüngliche Reihe mithilfe von τ umordnen, dann erhalten wir in der Tat die angegebene Reihe.

(2) *Es gibt Umordnungen, welche bestimmt gegen $\pm\infty$ divergieren.*

Beispiel. Auf Seite 80 hatten wir gesehen, dass die Reihe $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Der Riemannsche Umordnungssatz impliziert also, dass es zu jedem $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Bijektion $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\tau(n)} \cdot \frac{1}{\tau(n)} = x$ gibt.

Beweis. Wir werden diesen Satz nicht verwenden, und wir werden ihn daher auch nicht beweisen. Ein Beweis wird beispielsweise in [He, Satz 32.4] und [Hi, Kapitel 19] gegeben. Die Beweisidee ist zudem sehr hübsch auf

`http://de.wikipedia.org/wiki/Riemannscher_Umordnungssatz`

skizziert. Der Beweis kann auch als anspruchsvolle Übungsaufgabe mit dem vorhandenen Wissensstand durchgeführt werden. ■

Wir haben jetzt also gesehen, dass eine Umordnung das Konvergenzverhalten einer *nicht absolut konvergenten* Reihe völlig abändern kann. Der folgende Satz besagt nun, dass dieses Problem nicht auftaucht, wenn wir eine *absolut konvergenten Reihe* umordnen.

Satz 6.13. (Umordnungssatz) *Wenn $\sum_{n\geq w} a_n$ eine Reihe ist, welche absolut konvergiert, dann konvergiert auch jede Umordnung von $\sum_{n\geq w} a_n$ absolut gegen denselben Grenzwert.*

Beispiel. Auf Seite 81 hatten wir, mithilfe des Quotienten-Kriteriums gezeigt, dass die Reihe $\sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{5^n}$ absolut konvergiert. In diesem Fall führt also jede Umordnung zum gleichen Ergebnis. Dies ist ein Grund, warum absolute Konvergenz von Reihen eine feine Sache ist.

Wir werden diesen Satz im weiteren Verlauf der Vorlesung nicht benötigen. Wir haben deswegen den Satz in der Vorlesung nicht bewiesen. Der Vollständigkeit halber geben wir den Beweis im nächsten Teilkapitel.

6.5. **Beweis des Umordnungssatzes 6.13 (∗).** Wir wollen nun also den Umordnungssatz 6.13 beweisen. Im Beweis des Umordungssatzes 6.13 werden wir folgendes Lemma verwenden.

Lemma 6.14. *Es sei $\sum_{n\geq 1} a_n$ eine konvergente Reihe. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass*

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} a_n\right| \;<\; \epsilon.$$

Beweis von Lemma 6.14. Es sei also $\sum_{n\geq 1} a_n$ eine konvergente Reihe und es sei $\epsilon > 0$. Wie üblich bezeichnen wir mit $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ die k-te Partialsumme der Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$. Nachdem die

[54] Wir hatten gezeigt, dass die Reihe $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \dots$ konvergiert. Es folgt zudem fast sofort aus der Divergenz der harmonischen Reihe, also aus Satz 6.5, dass unsere Reihe *nicht* absolut konvergiert.

Reihe konvergiert, folgt aus Satz 4.1, dass die Partialsummen eine Cauchy-Folge bilden. Insbesondere gibt es ein $M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k, l \geq M$ gilt: $|s_k - s_l| < \frac{\epsilon}{2}$. Insbesondere gilt für alle $k \geq N := M + 1$, dass

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} a_n\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\sum_{n=N}^{k} a_n\right| = \lim_{k\to\infty} \overbrace{|s_k - s_N|}^{< \frac{\epsilon}{2}, \text{ da } k, N \geq M} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Lemma 3.6}}}{\leq} \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

■

Wir wenden uns nun dem eigentlich Beweis des Umordnungssatzes zu.

Beweis des Umordnungssatzes 6.13. Um die Notation etwas vereinfachen betrachten wir nur den Fall $w = 1$. Es sei $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ eine Reihe, welche absolut konvergiert und es sei $\tau \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Wir müssen zeigen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = a := \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Es sei also $\epsilon > 0$ gegeben. Wir müssen also ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass für alle $n \geq N$ gilt:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - a\right| < \epsilon$$

Nach Voraussetzung konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} |a_n|$. Lemma 6.14 besagt nun, dass es ein $K \in \mathbb{N}$ gibt, so dass[55]

$$\sum_{k=K}^{\infty} |a_k| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Wir müssen im Folgenden also den Betrag $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - a\right|$ "klein kriegen". Nachdem wir Information über die Partialsummen der Reihe $\sum\limits_{k\geq 1} a_k$ besitzen, ist es sinnvoll, diese ins Spiel zu bringen. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ machen wir dazu folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - a\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{K-1} a_k + \sum_{k=1}^{K-1} a_k - a\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{K-1} a_k\right| + \left|a - \sum_{k=1}^{K-1} a_k\right| \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 6.2}}}{=} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{K-1} a_k\right| + \left|\sum_{k=K}^{\infty} a_k\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 6.10}}}{\leq} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{K-1} a_k\right| + \sum_{k=K}^{\infty} |a_k| \\
&< \left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{K-1} a_k\right| + \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Wir müssen also jetzt noch ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass für alle $n \geq N$ der erste Summand $\leq \frac{\epsilon}{2}$ ist.

---

[55]Dieser Anfang vom Beweis erscheint vielleicht etwas "aus der Luft gegriffen", aber irgendwann Mal müssen wir ja die Voraussetzung verwenden, und mit dem $\frac{\epsilon}{2}$-Trick sind wir bis jetzt immer wieder gut gefahren.

Die Idee ist nun n so groß zu wählen, dass alle Summanden der Summe $\sum_{k=1}^{K-1} a_k$ auch schon in der Summe $\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)}$ auftreten. Wir führen diese Idee nun aus. Nachdem τ eine Bijektion ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass [56]

$$(*) \qquad \{1, 2, \ldots, K-1\} \;\subset\; \{\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(N)\}.$$

Dann gilt für alle $n \geq N$, dass

$$\left|\sum_{l=1}^{n} a_{\tau(l)} \;-\; \sum_{k=1}^{K-1} a_k\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn es folgt aus } (*)\text{, dass es zu jedem} \\ k\in\{1,\ldots,K-1\} \text{ ein } l\in\{1,\ldots,n\} \text{ mit } \tau(l)=k \text{ gibt}}}{=} \left|\sum_{k=1,\ldots,n \text{ mit } \tau(k)\geq K} a_{\tau(k)}\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungleichung}}}{\leq} \sum_{k=1,\ldots,n \text{ mit } \tau(k)\geq K} |a_{\tau(k)}| \;\leq\; \sum_{k=K}^{\infty} |a_k| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Wahl von } K}}{<} \frac{\epsilon}{2}$$

Zusammengefaßt erhalten wir also, dass für alle $n \geq N$ gilt:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - a\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{erste Ungleichung}}}{<} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} \;-\; \sum_{k=1}^{K-1} a_k\right| + \frac{\epsilon}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zweite Ungleichung}}}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \;=\; \epsilon.$$

Wir haben damit gezeigt, dass die Umordnung der Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$ auch gegen $a := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Es verbleibt zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$ auch absolut konvergiert. Aber dies folgt aus dem obigen Beweis, wenn wir die Reihe $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ anstatt der Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$ betrachten. ■

6.6. **Das Cauchy-Produkt für absolut konvergente Reihen.** Für endliche Summen gilt, wie wir in Satz 1.11 bewiesen hatten, folgendes Distributivgesetz:

$$\left(\sum_{p=0}^{k} a_p\right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{l} b_q\right) \;=\; \sum_{p=0}^{k} \sum_{q=0}^{l} a_p \cdot b_q,$$

denn jedes Produkt $a_p \cdot b_q$ taucht sowohl auf linken als auch auf der rechten Seite genau einmal auf. Man kann sich nun fragen, ob eine ähnliche Aussage für Reihen gilt. Es seien beispielsweise $\sum_{p\geq 0} a_p$ und $\sum_{q\geq 0} b_q$ konvergente Reihen. Gilt dann notwendigerweise, dass

$$\left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p\right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{\infty} b_q\right) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}}_{\text{endliche Summe}} \;?$$

Auf den ersten Blick erscheint das ziemlich logisch, denn auf der rechten Seite taucht jedes Produkt $a_p \cdot b_q$ auch genau einmal auf.

[56] Wir können beispielsweise $N = \max\{\tau^{-1}(1), \ldots, \tau^{-1}(K-1)\}$ wählen.

$$\begin{array}{ccccc}
a_0 \cdot b_3 & a_1 \cdot b_3 & a_2 \cdot b_3 & a_3 \cdot b_3 & \dots \\
a_0 \cdot b_2 & a_1 \cdot b_2 & a_2 \cdot b_2 & a_3 \cdot b_2 & \dots \\
a_0 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_1 & a_3 \cdot b_1 & \dots \\
a_0 \cdot b_0 & a_1 \cdot b_0 & a_2 \cdot b_0 & a_3 \cdot b_0 & \dots
\end{array}$$

die Summe der Terme ist $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$ mit $n = 3$

In Übungsblatt 6 werden wir sehen, dass die Antwort im Allgemeinen jedoch nein ist. Genauer gesagt, wir werden sehen, dass es konvergente Reihen $\sum\limits_{p\geq 0} a_p$ und $\sum\limits_{q\geq 0} b_q$ gibt, so dass

$$\Big(\sum_{p=0}^{\infty} a_p\Big) \cdot \Big(\sum_{q=0}^{\infty} b_q\Big) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}.$$

In der Tat gibt es Reihen, so dass die Reihe auf der rechten Seite noch nicht einmal konvergiert.

Der folgende Satz besagt nun, dass dieses Problem nicht auftreten kann, wenn die beiden ursprünglichen Reihen *absolut* konvergieren.

Satz 6.15. (Cauchy-Produktformel) *Es seien* $\sum\limits_{p\geq 0} a_p$ *und* $\sum\limits_{q\geq 0} b_q$ *Reihen, welche* absolut konvergieren. *Dann gilt*

$$\Big(\sum_{p=0}^{\infty} a_p\Big) \cdot \Big(\sum_{q=0}^{\infty} b_q\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}.$$

6.7. **Beweis der Cauchy-Produktformel** $(*)$**.** Im Beweis von Satz 6.15 werden wir folgendes einfaches Lemma benötigen.

Lemma 6.16. *Wenn*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$$

eine konvergente Folge ist, dann konvergiert auch die Folge

$$\big(a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\big)_{n\in\mathbb{N}_0} = (a_0, a_0, a_1, a_1, a_2, a_2, \dots)$$

gegen die gleiche reelle Zahl.

Beweis $(*)$. Wir setzen $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Wir müssen zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = a$. Es sei also $\epsilon > 0$. Dann existiert nach Voraussetzung ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Dann gilt aber auch für alle $n \geq 2N$, dass $|a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - a| < \epsilon$. ∎

Beweis von Satz 6.15. Für $n \in \mathbb{N}_0$ schreiben wir

$$\begin{aligned}
Q_n &:= \{(p,q) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \,|\, p \leq n \text{ und } q \leq n\}, \qquad \text{sowie} \\
D_n &:= \{(p,q) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \,|\, p + q \leq n\}.
\end{aligned}$$

Anders ausgedrückt, die Menge Q_n beschreibt das "Quadrat" in $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit den Eckpunkten $(0,0), (0,n), (n,0)$ und (n,n), und die Menge D_n beschreibt das "Dreieck" in $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit den Eckpunkten $(0,0), (0,n)$ und $(n,0)$. Für jedes n gilt, dass $Q_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \subset D_n \subset Q_n$.

Es seien nun $\sum\limits_{p\geq 0} a_p$ und $\sum\limits_{q\geq 0} b_q$ absolut konvergente Reihen. Dann gilt:

$$\text{(a)} \quad \Big(\sum_{p=0}^{\infty} a_p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{\infty} b_q\Big) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 3.4}}}{=} \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{p=0}^{n} a_p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{n} b_q\Big) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Distributivgesetz}}}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{(p,q)\in Q_n} a_p b_q, \text{ und}$$

$$\text{(b)} \quad \Big(\sum_{p=0}^{\infty} |a_p|\Big)\Big(\sum_{q=0}^{\infty} |b_q|\Big) \overset{\substack{\text{Satz 3.4}\\ \downarrow}}{=} \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{p=0}^{n} |a_p|\Big)\Big(\sum_{q=0}^{n} |b_q|\Big) \overset{\substack{\text{Distributivgesetz}\\ \downarrow}}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{(p,q)\in Q_n} |a_p b_q|.$$

Zudem ist

$$\text{(c)} \quad \sum_{d=0}^{\infty} \cdot \sum_{k=0}^{d} a_k b_{d-k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{d=0}^{n}\sum_{k=0}^{d} a_k b_{d-k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{(p,q)\in D_n} a_p b_q.$$

Nach (a) und (c) genügt es folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung.

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\sum_{(p,q)\in Q_n} a_p b_q - \sum_{(p,q)\in D_n} a_p b_q\Big| = 0.$$

Wir führen folgende Abschätzung durch:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\Big|\sum_{(p,q)\in Q_n} a_p b_q - \sum_{(p,q)\in D_n} a_p b_q\Big| &\overset{\substack{\text{denn } D_n\subset Q_n\\ \downarrow}}{=} \lim_{n\to\infty}\Big|\sum_{(p,q)\in Q_n\setminus D_n} a_p b_q\Big| \overset{\substack{\text{Dreiecksungleichung}\\ \downarrow}}{\leq} \lim_{n\to\infty}\sum_{(p,q)\in Q_n\setminus D_n} |a_p b_q| \\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{nachdem } Q_n\setminus D_n\subset Q_n\setminus Q_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}}}{\leq} \lim_{n\to\infty}\sum_{(p,q)\in Q_n\setminus Q_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}} |a_p b_q| = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{(p,q)\in Q_n} |a_p b_q| - \sum_{(p,q)\in Q_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}} |a_p b_q|\Big) =: *
\end{aligned}$$

Um die Notation zu vereinfachen, setzen wir

$$c_n := \sum_{(p,q)\in Q_n} |a_p b_q|.$$

In (b) hatten wir gesehen, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert. Mit dieser Notation können wir jetzt die obige Abschätzung weiterführen:

$$* = \lim_{n\to\infty}\Big(c_n - c_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\Big) = \lim_{n\to\infty} c_n - \lim_{n\to\infty} c_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Lemma 6.16}}}{=} 0.$$

■

6.8. **Die Exponentialreihe.** In diesem Kapitel führen wir die Exponentialreihe ein, welche zusammen mit der geometrischen Reihe eine der wichtigsten Reihen überhaupt ist.

Satz 6.17. *Für jedes $x\in\mathbb{R}$ konvergiert die* Exponentialreihe $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$ *absolut.*

Beweis. Es sei $x\in\mathbb{R}$ beliebig. Wir schreiben $a_n := \frac{x^n}{n!}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n!}{x^n\cdot(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus Satz 3.4 (3), angewandt auf } \lambda=|x|}}{=} |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Es folgt aus dieser Berechnung und dem Quotienten-Kriterium, d.h. aus Satz 6.11, dass die Exponentialreihe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n \;=\; \sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ absolut konvergiert. ■

Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\exp(x) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \;=\; \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} \;=\; \lim_{k\to\infty} \Big(\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1} + \underset{\substack{\uparrow \\ n=1}}{x} + \underset{\substack{\uparrow \\ n=2}}{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} \Big)$$

Wir definieren zudem die

$$\textit{Eulersche Zahl } e \;:=\; \exp(1).$$

Eine Computerberechnung zeigt, dass $e \approx 2.7182818284590\ldots$.[57]

Definition. Wir bezeichnen die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x) \end{array} \qquad \text{als die } \textit{Exponentialfunktion.}$$

Der folgende Satz beinhaltet die wohl wichtigste Eigenschaft der Exponentialfunktion.

Theorem 6.18. (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\exp(x+y) \;=\; \exp(x)\cdot\exp(y).$$

Beweis. Es seien also $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt

$$\exp(x)\cdot\exp(y) \;=\; \Big(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!}\Big)\cdot\Big(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{y^q}{q!}\Big) \;\underset{\uparrow}{=}\; \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot x^k\cdot y^{n-k}$$

nach der Cauchy-Produktformel 6.15, diese können wir anwenden, da die Exponentialreihe *absolut* konvergiert

$$\underset{\uparrow}{=}\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cdot x^k\cdot y^{n-k} \;\underset{\uparrow}{=}\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\cdot(x+y)^n \;=\; \exp(x+y).$$

nach Definition von $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ nach Satz 2.7 ■

Wir beschließen das Kapitel mit ein paar grundlegenden Eigenschaften der Exponentialfunktion.

---

[57]Die ersten 50 Stellen der Eulerschen Zahl sind

$$e \approx 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995$$

Hierbei ist bei den Stellen kein "System" zu erkennen. Das legt den Schluß nahe, dass e wohl keine rationale Zahl ist. Dies ist in der Tat der Fall, der Beweis dazu ist sogar relativ einfach:

`http://de.wikipedia.org/wiki/Beweis_der_Irrationalität_der_eulerschen_Zahl`

Es gilt allerdings auch noch eine deutlich stärkere Aussage: die Eulersche Zahl e ist transzendental, d.h. e kann nicht die Nullstelle von einem Polynom mit rationalen Koeffizienten sein. Diese Aussage wurde erst 1873 von Hermite bewiesen, also 150 Jahre nachdem die Eulersche Zahl eingeführt wurde.

Satz 6.19. *Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften:*

(1) *Es ist* $\exp(0) = 1$.
(2) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
(3) *Für alle* $x > 0$ *gilt* $\exp(x) \in (1, \infty)$ *und für alle* $x < 0$ *gilt* $\exp(x) \in (0, 1)$.
(4) *Für jedes* $n \in \mathbb{Z}$ *gilt* $\exp(n) = e^n$.

Beweis.

(1) Wir berechnen

$$\exp(0) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} \;=\; \lim_{k\to\infty} \underbrace{\left(1 + 0 + \frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{3!} + \cdots + \frac{0^k}{k!}\right)}_{=1} \;=\; 1.$$

(2) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(-x)\cdot\exp(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Theorem 6.18}}}{=} \exp(-x+x) \;=\; \exp(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{siehe (1)}}}{=} 1, \quad \text{also ist } \exp(-x) \;=\; \frac{1}{\exp(x)}.$$

(3) Es sei zuerst $x > 0$. Dann gilt

$$\exp(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \;=\; 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \;=\; 1 + x + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} \frac{x^n}{n!} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Satz 3.6, da } x>0.}}{\geq} 1 + x \;>\; 1.$$

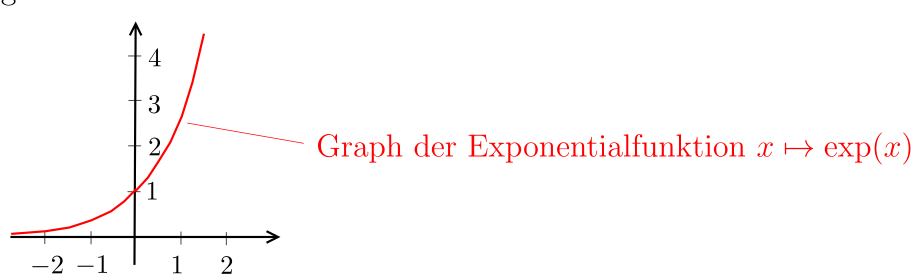
Es sei nun $x < 0$. Wir hatten gerade bewiesen, dass $\exp(-x) \in (1, \infty)$. Es folgt aus (2), dass $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \in (0, 1)$.

(4) Der Fall $n = 0$ folgt aus (1). Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\exp(n) \;=\; \exp(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n-\text{Mal}}) \overset{\substack{\text{Theorem 6.18} \\ \downarrow}}{=} \underbrace{\exp(1)\cdot \cdots \cdot \exp(1)}_{n-\text{Mal}} \overset{\substack{\text{Definition von } e \\ \downarrow}}{=} \underbrace{e \cdot \cdots \cdot e}_{n-\text{Mal}} \;=\; e^n.$$

Es sei nun $n < 0$. Wir hatten gerade bewiesen, dass $\exp(-n) = e^{-n}$. Es folgt aus (2), dass $\exp(n) = \frac{1}{\exp(-n)} = \frac{1}{e^{-n}} = e^n$. ■

Wir beschließen das Kapitel mit der Illustration des Graphen der Exponentialfunktion in Abbildung 6.8.



7. Stetige Funktionen

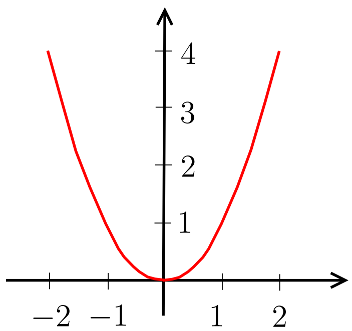
7.1. **Beispiele von Funktionen.** Wir hatten uns bislang ausführlich mit Folgen und Reihen beschäftigt aber jetzt wenden wir uns endlich dem eigentlichen Ziel der Analysis zu, nämlich dem Studium von Funktionen.

Definition. Eine *Funktion* ist eine Abbildung $f\colon D \to \mathbb{R}$, wobei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Wir nennen D den *Definitionsbereich von f*. Zudem bezeichnen wir

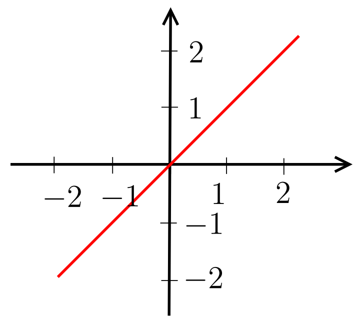
$$\operatorname{Graph}(f) \ := \ \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D\}$$

als den *Graphen von f*.

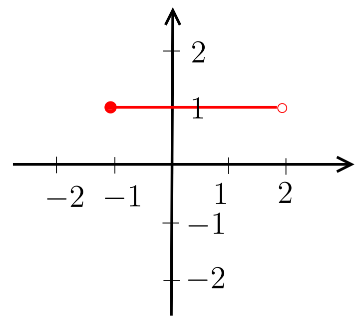
Im Folgenden betrachten wir mehrere Beispiele von Funktionen und deren dazugehörige Graphen. Wie bei Folgen sehen wir dabei, dass der Phantasie bei der Definition von Funktion keine Grenzen gesetzt sind.



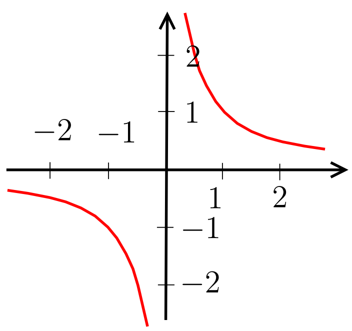
$$\begin{array}{rcl} a\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$



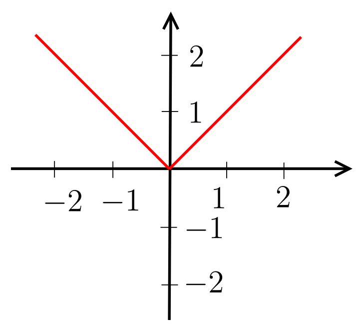
$$\begin{array}{rcl} b\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$



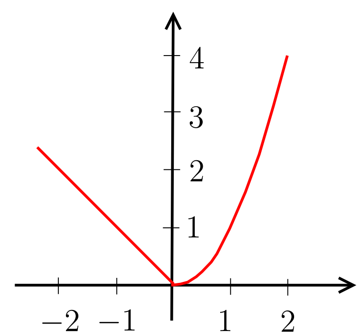
$$\begin{array}{rcl} c\colon [-1,2) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$$



$$\begin{array}{rcl} d\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$



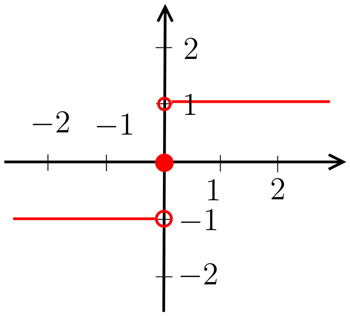
$$\begin{array}{rcl} e\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$$



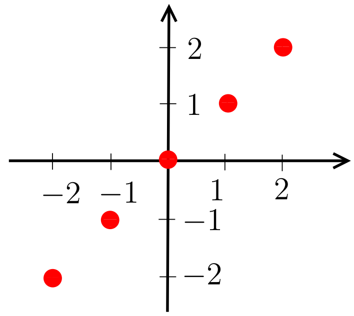
$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -x, & \text{wenn } x \le 0, \\ x^2, & \text{wenn } x > 0 \end{cases} \end{array}$$

Wir können aus dem gegebenen Schatz von Funktionen noch viele weitere konstruieren, indem wir beispielsweise Funktionen addieren, multiplizieren oder verknüpfen.

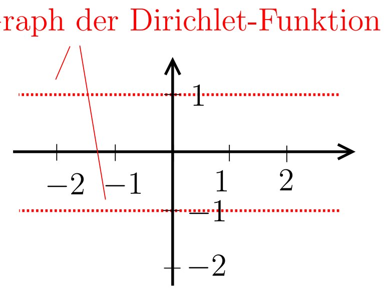
7.2. **Definition von Stetigkeit und erste Eigenschaften.** Wir führen nun einer der grundlegendsten und wichtigsten Begriffe der Analysis ein.



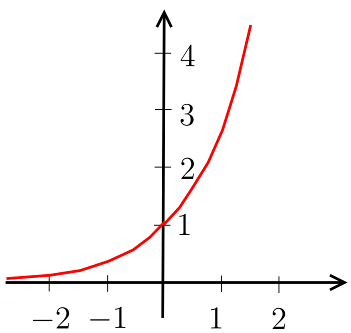
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -1, & \text{wenn } x<0,\\ 0, & \text{wenn } x=0,\\ 1, & \text{wenn } x>0 \end{cases}$$



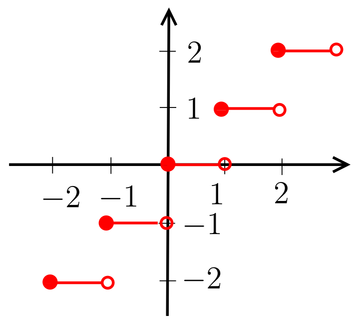
$$h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x$$



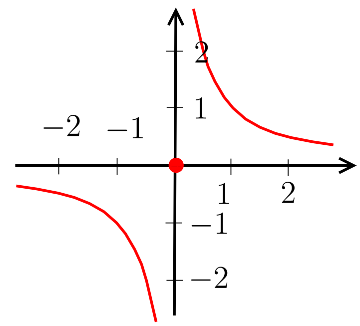
$$i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q},\\ -1, & \text{wenn } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



$$j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(x)$$



$$k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lfloor x \rfloor$$



$$l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{wenn } x \neq 0,\\ 0, & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

Definition. Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Wir definieren

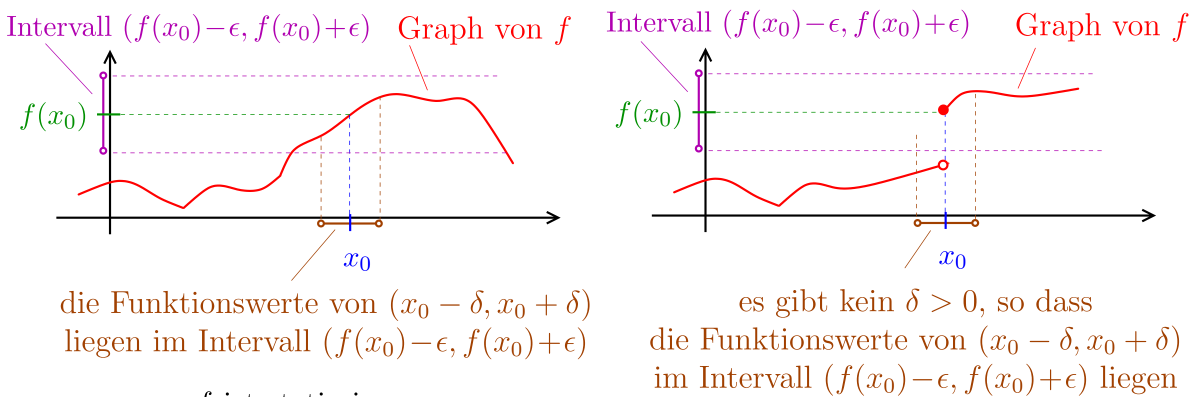
$$f \text{ ist stetig im Punkt } x_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{\substack{x \in D \text{ mit}\\ |x-x_0|<\delta}}{\forall}\ |f(x)-f(x_0)| < \epsilon.$$

Wir sagen $f\colon D \to \mathbb{R}$ *ist stetig*, wenn f in jedem Punkt des Definitionsbereichs stetig ist.

Bemerkung. Wenn man Intervalle den Absolutbeträgen bevorzugt, dann kann man die Definition von Stetigkeit wie folgt umschreiben:

$$f \text{ ist stetig im Punkt } x_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{\substack{x \in D \text{ mit}\\ x \in (x_0-\delta,\, x_0+\delta)}}{\forall}\ f(x) \in (f(x_0)-\epsilon, f(x_0)+\epsilon).$$

Das folgende Lemma zeigt, dass affin lineare Funktionen stetig sind.

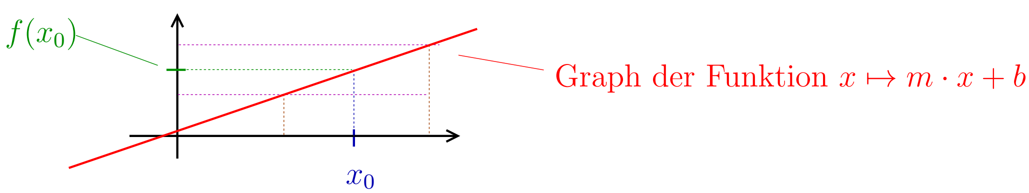


f ist stetig in x_0

f ist *nicht* stetig in x_0

Lemma 7.1. *Für jedes beliebige $m \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ ist die affin lineare Funktion*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & m \cdot x + b \end{array} \qquad \textit{stetig}$$



Beweis. Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir müssen zeigen, dass die Funktion stetig im Punkt x_0 ist. Es sei also $\epsilon > 0$.

(1) Wenn $m \neq 0$, dann setzen wir $\delta := \frac{\epsilon}{|m|}$. Dann gilt:

$$|x - x_0| < \delta \implies \frac{1}{|m|} \cdot |\overbrace{(m \cdot x + b)}^{=f(x)} - \overbrace{(m \cdot x_0 + b)}^{=f(x_0)}| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < |m| \cdot \delta = \epsilon.$$

(2) Wenn $m = 0$, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, dass $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \epsilon$. Also erfüllt jedes $\delta > 0$, z.B. $\delta = 1$, die gewünschte Bedingung. ∎

Notation. Wenn $f: D \to X$ irgendeine Abbildung ist, und wenn $C \subset D$ eine Teilmenge ist, dann bezeichnet man mit $f|_C$ die Einschränkung von f auf den Definitionsbereich C. D.h. $f|_C$ bezeichnet die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f|_C : C & \to & X \\ c & \mapsto & f(c). \end{array}$$

Wir illustrieren diese Definition in Abbildung 18.

Das folgende Lemma besagt, dass die Einschränkung einer stetigen Funktion auf eine Teilmenge wiederum stetig ist.

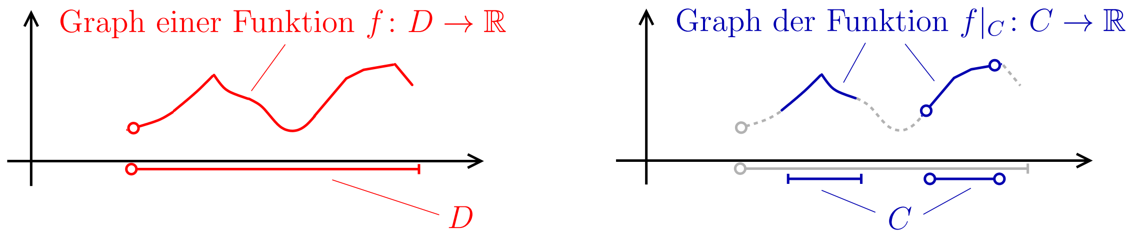


Abbildung 18.

Lemma 7.2. *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist für jede Teilmenge $C \subset D$ die Einschränkung $f|_C\colon C \to \mathbb{R}$ ebenfalls stetig.*

Beweis (∗). Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es sei $C \subset D$. Es sei $x_0 \in C$ und $\epsilon > 0$. Dann gibt es nach Voraussetzung ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$. Dann gilt diese Ungleichung natürlich auch für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap C$. Wir haben also gezeigt, dass die Funktion $f|_C$ im Punkt x_0 stetig ist. ■

Beispiel. Es folgt aus Lemma 7.1 und aus Lemma 7.2, dass die Funktionen

$$\begin{array}{rcl} [-1,2) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

deren Graphen wir auf den Seiten 92 und 215 skizziert hatten, stetig sind.

Satz 7.3. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es sei $g\colon [b,c] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(b) = g(b)$. Dann ist die Funktion*

$$\begin{array}{rcl} h\colon [a,c] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x), & \text{wenn } x \in [a,b], \\ g(x), & \text{wenn } x \in (b,c] \end{cases} \end{array}$$

stetig. Die gleiche Aussage gilt auch, wenn f und g auf Intervallen der Form $(a,b]$ oder $(-\infty,b]$ beziehungsweise $[b,c)$ oder $[b,\infty)$ definiert sind.

Beweis. Der Satz wird in Übungsblatt 6 bewiesen. ■

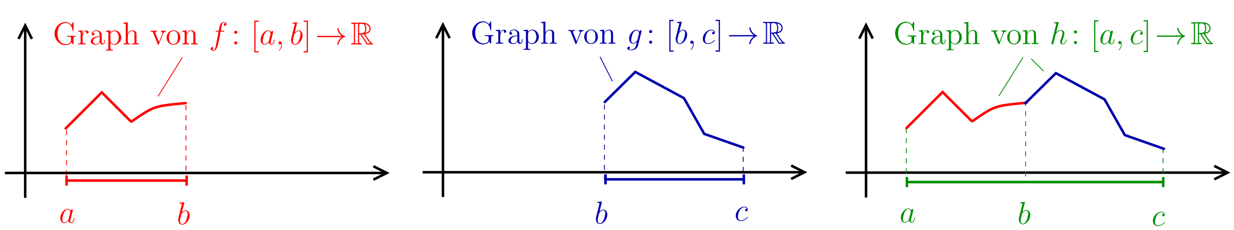


Abbildung 19. Illustration von Satz 7.3.

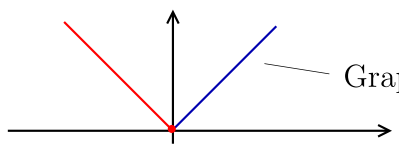
Beispiel. Wir betrachten die Betragsfunktion

$$\begin{array}{rcl} h\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| = \begin{cases} -x, & \text{falls } x \le 0 \\ x, & \text{falls } x > 0. \end{cases} \end{array}$$

Es folgt Lemma 7.1 und aus Lemma 7.2, dass die Funktionen

$$\begin{array}{rcl} f\colon (-\infty, 0] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & -x \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rcl} f\colon [0, \infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x \end{array}$$

stetig sind. Also folgt aus Lemma 7.3, dass die Betragsfunktion h stetig ist.



An dieser Stelle wäre es jetzt logisch die Summe und das Produkt von stetigen Funktionen zu betrachten. Wir diskutieren aber zuerst den Zusammenhang von Stetigkeit und Grenzwerten von Folgen, weil uns dann unsere vorherigen Ergebnisse zu Grenzwerten bei der Diskussion von Stetigkeit das leben deutlich erleichtern werden.

7.3. **Stetigkeit von Funktionen und Grenzwerte von Folgen.** Der folgende Satz verbindet den neuen Begriff der Stetigkeit mit dem vertrauten Begriff des Grenzwertes einer Folge von reellen Zahlen.

Satz 7.4. *Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $x_0 \in D$. Dann gilt:*

$$\begin{array}{c} f \text{ ist stetig} \\ \text{im Punkt } x_0 \end{array} \iff \begin{array}{r} \text{für jede Folge } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } D \text{ mit } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0, \\ \text{gilt, dass dann auch } \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0). \end{array}$$

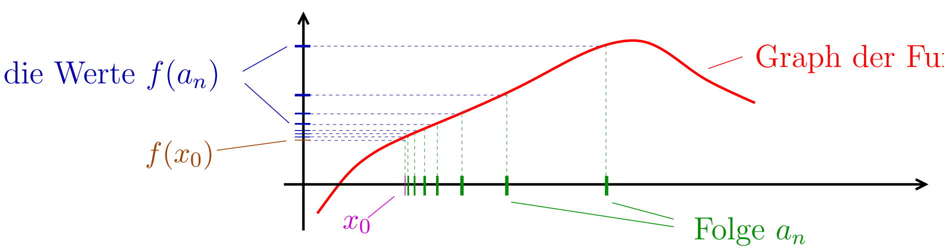


Abbildung 20. Illustration von Satz 7.4.

Bemerkung. Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in D ist, welche gegen einen Punkt in D konvergiert. Dann besagt die "$\Rightarrow$"-Richtung von Satz 7.4, dass gilt:

$$f \text{ ist stetig im Grenzwert } \lim_{n\to\infty} a_n \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big).$$

Etwas salopp gesagt gilt also: eine Funktion ist genau dann stetig, wenn wir Grenzwert und Funktion vertauschen können.

Beispiel. Manchmal können Satz 7.4, auch verwenden um zu zeigen, dass eine gegebene Funktion *nicht* stetig ist. Betrachten wir beispielsweise die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x-2, & \text{wenn } x \le 3, \\ x-1, & \text{wenn } x > 3, \end{cases} \end{aligned}$$

und die Folge $3 + \frac{1}{n}$, welche in Abbildung 21 skizziert sind. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f\big(\underbrace{3+\tfrac{1}{n}}_{>3}\big) \;=\; \lim_{n\to\infty}\big(2+\tfrac{1}{n}\big) \;=\; 2 \ne 1 \;=\; f(3) \;=\; f\Big(\lim_{n\to\infty}\big(3+\tfrac{1}{n}\big)\Big).$$

Es folgt also aus dem Prinzip der Kontraposition und der obigen Bemerkung, dass die Funktion f im Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{1}{n}) = 3$ *nicht* stetig ist.

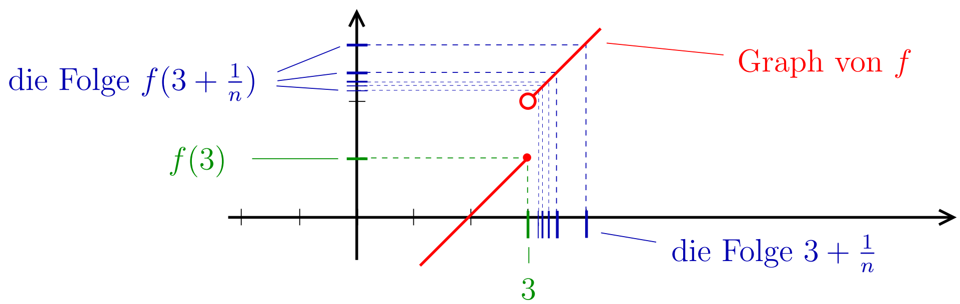


Abbildung 21.

Wir beweisen die "$\Rightarrow$"-Richtung und die "$\Leftarrow$"-Richtung von Satz 7.4 getrennt.

Beweis der "$\Rightarrow$"-Richtung von Satz 7.4. Für eine beliebige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D müssen wir beweisen:

$$f \text{ stetig in } x_0 \;\text{ und }\; \lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0).$$

Mit anderen Worten, wir müssen beweisen:

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\;\underset{\delta>0}{\exists}\;\underset{\substack{x\in D \text{ mit}\\ |x-x_0|<\delta}}{\forall} |f(x)-f(x_0)|<\epsilon \text{ und } \underset{\mu>0}{\forall}\;\underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\;\underset{n\ge N}{\forall} |a_n-x_0|<\mu \;\Rightarrow\; \underset{\epsilon>0}{\forall}\;\underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\;\underset{n\ge N}{\forall} |f(a_n)-f(x_0)|<\epsilon.$$

Es sei also $\epsilon > 0$. Nachdem f im Punkt x_0 stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ gilt

$$|x-x_0| < \delta \quad\overset{(1)}{\Longrightarrow}\quad |f(x)-f(x_0)| < \epsilon.$$

Wir wenden die Definition von $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ auf $\mu = \delta$ an. Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$n \ge N \quad\overset{(2)}{\Longrightarrow}\quad |a_n - x_0| < \delta.$$

Dann gilt aber auch, dass

$$n \geq N \quad \xrightarrow{(2)} \quad |a_n - x_0| < \delta \quad \xrightarrow{(1)} \quad |f(a_n) - f(x_0)| < \epsilon. \qquad \blacksquare$$

Beweis der "⇐"-Richtung von Satz 7.4. Wir wollen also folgende Behauptung beweisen.

$$\overbrace{\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{\substack{x\,\in\, D \text{ mit} \\ |x-x_0|<\delta}}{\forall} |f(x)-f(x_0)| < \epsilon}^{f \text{ ist stetig im Punkt } x_0} \quad \Longleftarrow \quad \underset{\substack{\text{Folge } a_n \text{ in } D \\ \text{mit } \lim a_n = x_0}}{\forall} \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0).$$

Aus Kontraposition folgt, dass es genügt folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung.

$$\underset{\epsilon>0}{\exists}\ \underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{\substack{x\,\in\, D \text{ mit} \\ |x-x_0|<\delta}}{\exists} |f(x)-f(x_0)| \geq \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \underset{\substack{\text{Folge } a_n \text{ in } D \\ \text{mit } \lim a_n = x_0}}{\exists} \begin{array}{c} f(a_n) \text{ konvergiert} \\ \text{nicht gegen } f(x_0). \end{array}$$

Wir wählen also ein $\epsilon > 0$ mit der links genannten Eigenschaft. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert dann also ein $a_n \in D$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\text{(i)} \quad |a_n - x_0| < \tfrac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad \text{(ii)} \quad |f(a_n) - f(x_0)| \geq \epsilon.$$

Dann folgt leicht aus (i) und der Definition von Konvergenz von Folgen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$, und aus (ii), dass die Folge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht* gegen $f(x_0)$ konvergiert. ■

7.4. **Eigenschaften von stetigen Funktionen.** Der folgende Satz besagt insbesondere, dass die Summe und das Produkt von stetigen Funktionen wiederum stetig ist.

Satz 7.5. *Es seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen, welche im Punkt $x_0 \in D$ stetig sind. Zudem sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen*

$$\begin{array}{rcl} f+g\colon D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f\cdot g\colon D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)\cdot g(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \lambda\cdot f\colon D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\cdot f(x) \end{array}$$

ebenfalls stetig im Punkt x_0. Wenn $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, dann ist auch die Funktion

$$\begin{array}{rcl} \frac{f}{g}\colon D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \end{array} \qquad \textit{stetig im Punkt } x_0.$$

Beweis.

> Wenn man die Definition und Aussagen mal verdaut hat, dann sieht man, dass der Satz eigentlich sofort aus Satz 3.4 und Satz 7.4 folgt.

Wir zeigen im Folgenden, dass die Funktion $f+g$ im Punkt x_0 stetig ist. Nach Satz 7.4 genügt es folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} (f+g)(a_n) = (f+g)(x_0)$.

Es sei also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcccl} & & \text{Definition der Funktion } f+g & & \text{Satz 3.4 (1)} \\ \lim\limits_{n\to\infty}(f+g)(a_n) & \overset{\downarrow}{=} & \lim\limits_{n\to\infty}(f(a_n)+g(a_n)) & \overset{\downarrow}{=} & \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) + \lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) \\ & \underset{\uparrow}{=} & f(x_0)+g(x_0) & \underset{\uparrow}{=} & (f+g)(x_0). \\ & & \text{folgt aus Satz 7.4, da } f \text{ und } g \text{ stetig} & & \text{Definition der Funktion } f+g \end{array}$$

Alle anderen Aussagen werden ganz analog auf Satz 3.4 zurückgeführt. ■

Definition. Es seien $a_0,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ gegeben. Wir nennen

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \end{array}$$

eine *Polynomfunktion von Grad n*. Es seien $p,q\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zwei Polynomfunktionen. Dann heißt

$$\begin{array}{rcl} f\colon \{x\in\mathbb{R} \,|\, q(x)\neq 0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{p(x)}{q(x)} \end{array}$$

eine *rationale Funktion.*

Beispiel. Beispielsweise ist

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -3x^3+\sqrt{2}x^4+\frac{2}{3}x^5 \end{array} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{2}\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^3+7x+2}{x^2-2} \end{array}$$

eine Polynomfunktion bzw. eine rationale Funktion.

Satz 7.6. *Polynomfunktionen und rationale Funktionen sind stetig.*

Beweis. Es folgt aus Lemma 7.1 und Satz 7.5, dass die Funktionen $x \mapsto x^n = x\cdot\ldots x$ und Linearkombinationen von solchen Funktionen stetig sind. Dies bedeutet gerade, dass Polynomfunktionen stetig. Aus Satz 7.5 folgt nun auch, dass rationale Funktionen stetig sind. ■

Der folgende Satz besagt insbesondere, dass die Verknüpfung von stetigen Funktionen wiederum stetig ist.

Satz 7.7. *Es seien $f\colon D\to\mathbb{R}$ und $g\colon E\to\mathbb{R}$ zwei Funktionen, so dass $f(D)\subset E$. Wenn f im Punkt x_0 stetig ist und wenn g im Punkt $f(x_0)$ stetig ist, dann ist die Funktion*[58]

$$\begin{array}{rcl} g\circ f\colon D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(\underbrace{f(x)}_{\in E}) \end{array} \qquad \textit{stetig im Punkt } x_0.$$

[58] Es folgt aus der Voraussetzung, dass $f(D)\subset E$, dass die Verknüpfung $g(f(x))$ überhaupt definiert ist.

Beispiel. Wir betrachten die Funktionen [59] $f(x) = x^2 - 2$ und $g(x) = |x|$. Es folgt aus Satz 7.7, dass die Verknüpfung $(g \circ f)(x) = |x^2 - 2|$ stetig ist.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die Funktion $g \circ f \colon D \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 stetig ist. Wir verwenden dazu Stetigkeitskriterium aus Satz 7.4. Es sei also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$. Wir müssen folgende Behauptung beweisen:

Behauptung. Es ist $(g \circ f)(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} (g \circ f)(a_n)$.

Es gilt:

$$(g\circ f)(x_0) = g(f(x_0)) = g\big(f\big(\lim_{n\to\infty} a_n\big)\big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Satz 7.4 und der} \\ \text{Voraussetzung, dass } f \text{ im Punkt} \\ x_0 = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ stetig ist}}}{=} g\big(\lim_{n\to\infty} f(a_n)\big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Satz 7.4 und der} \\ \text{Voraussetzung, dass } g \text{ im Punkt} \\ f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \text{ stetig ist}}}{=} \lim_{n\to\infty} g(f(a_n)) = \lim_{n\to\infty} (g\circ f)(a_n).$$

■

7.5. **Stetigkeit der Exponentialfunktion.** Die Abbildung des Graphen der Exponentialfunktion auf Seite 215 legt natürlich nahe, dass die Exponentialfunktion stetig ist. Dies ist in der Tat der Fall, wie wir jetzt beweisen werden.

Satz 7.8. *Die Exponentialfunktion* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist stetig.*

Beweis $(*)$. Wir wollen zuerst zeigen, dass die Funktion exp im Punkt 0 stetig ist. Dazu benötigen wir folgende Abschätzung.

Behauptung. Für alle $|x| < \frac{1}{2}$ gilt $|\exp(x) - 1| \le 2 \cdot |x|$.

Es sei also $|x| < \frac{1}{2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|\exp(x) - 1| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1\right| \overset{\substack{\text{Lemma 6.2} \\ \downarrow}}{=} \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| \overset{\substack{\text{Satz 3.17} \\ \downarrow}}{=} |x| \cdot \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}\right| \overset{\substack{\text{Umparametrisierung } m=n-1 \\ \downarrow}}{=} |x| \cdot \left|\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(m+1)!}\right| \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 6.10}}}{\le} |x| \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|x|^m}{(m+1)!} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Satz 3.17} \\ \text{da } |x| < \frac{1}{2} \text{ und } n! \ge 1}}{\le} |x| \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Satz 3.16, da geometrische Reihe}}}{=} |x| \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot |x|.
\end{aligned}$$

⊞

Wir wenden uns nun wieder dem Beweis der Stetigkeit von exp im Punkt 0 zu. Es sei also $\epsilon > 0$. Wir setzen $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2}\}$. Für alle $|x| < \delta$ gilt dann

$$|\exp(x) - \exp(0)| = |\exp(x) - 1| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus der Behauptung, da } |x| < \delta \le \frac{1}{2}}}{\le} 2 \cdot |x| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } |x| < \delta \le \frac{\epsilon}{2}}}{<} 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

---

[59] Bei einer Funktion muss man immer angeben, was der Definitionsbereich sein soll. Beispielsweise sind die Funktionen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

verschieden, nachdem diese Funktionen verschiedene Definitionsbereiche besitzen. Wenn wir nun schreiben, "$f(x) = x^2 - 2$", oder "$f(x) = \frac{1}{x}$", oder "$f(x) = \frac{x}{2-|x|}$", ohne eine Angabe vom Definitionsbereich, dann ist der Definitionsbereich die Menge aller Punkte in $\mathbb{R}$, für die die rechte Seite definiert ist.

Wir müssen noch zeigen, dass exp in jedem beliebigen Punkt stetig ist. Es sei also $x_0 \in \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt nach der Funktionalgleichung 6.18, dass $\exp(x) = \exp(x - x_0) \cdot \exp(x_0)$. Daraus folgt, dass wir die folgende Gleichheit von Funktionen haben:

$$(x \mapsto \exp(x)) \;=\; \underbrace{(z \mapsto z \cdot \exp(x_0))}_{\substack{=:\, h(z),\ \text{stetig} \\ \text{nach Lemma 7.1}}} \circ \underbrace{(y \mapsto \exp(y))}_{\substack{=:\, g(y),\ \text{stetig in } 0 \\ \text{wie gerade bewiesen}}} \circ \underbrace{(x \mapsto x - x_0)}_{\substack{=:\, f(x),\ \text{stetig} \\ \text{nach Lemma 7.1}}}.$$

Wir hatten gerade bewiesen, dass die mittlere Funktion im Punkt 0 stetig ist. Nachdem f in x_0 stetig ist, nachdem g in $f(x_0) = 0$ stetig ist, und nachdem h in $g(f(x_0)) = \exp(0) = 1$ stetig ist folgt nun aus Satz 7.7, dass die Verknüpfung der Funktionen rechts im Punkt x_0 stetig ist. Aber das galt es zu beweisen. ■

7.6. **Grenzwerte von Funktionen.**

Definition. Im Folgenden sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $x_0 \in \mathbb{R}$.

(1) Nehmen wir an, es gibt ein $\eta > 0$, so dass $(x_0 - \eta, x_0) \subset D$. [60]Für $a \in \mathbb{R}$ schreiben wir [61]

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = a \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{\substack{x \in D \text{ mit} \\ x \in (x_0-\delta, x_0)}}{\forall} \ |f(x) - a| < \epsilon$$

und wir nennen $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$ den *linksseitigen Grenzwert von f am Punkt x_0*. [62]

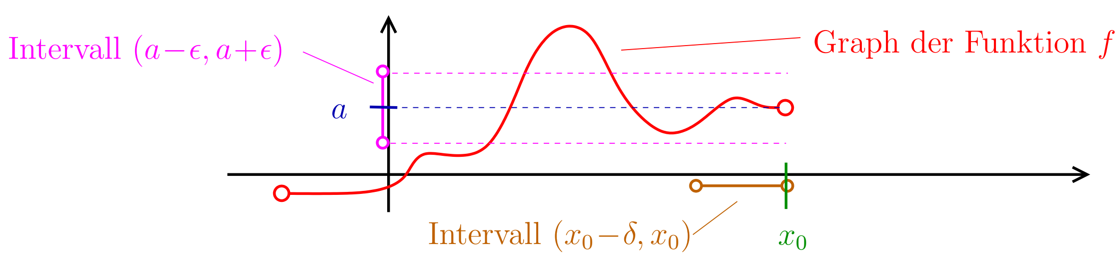


Abbildung 22. Illustration der Definition des linksseitigen Grenzwertes.

Definition.

(2) Ganz analog, wenn es ein $\eta > 0$ gibt, so dass $(x_0, x_0 + \eta) \subset D$, dann schreiben wir [63]

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = a \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{\substack{x \in D \text{ mit} \\ x \in (x_0, x_0+\delta)}}{\forall} \ |f(x) - a| < \epsilon$$

[60]Die Aussage, dass es ein $\eta > 0$ gibt mit $(x_0 - \eta, x_0) \subset D$ bedeutet, dass die Funktion f "links" von x_0 definiert ist. Diese Bedingung führt dazu, dass der Grenzwert, wenn dieser denn existiert, eindeutig bestimmt ist. Der Beweis der Eindeutigkeit ist ähnlich dem Beweis von Satz 3.1.

[61]Die Notation $x \nearrow x_0$ soll suggestieren, dass x "von unten" gegen x_0 strebt.

[62]Der linksseitige Grenzwert von f am Punkt x_0 wird manchmal auch mit $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ bezeichnet.

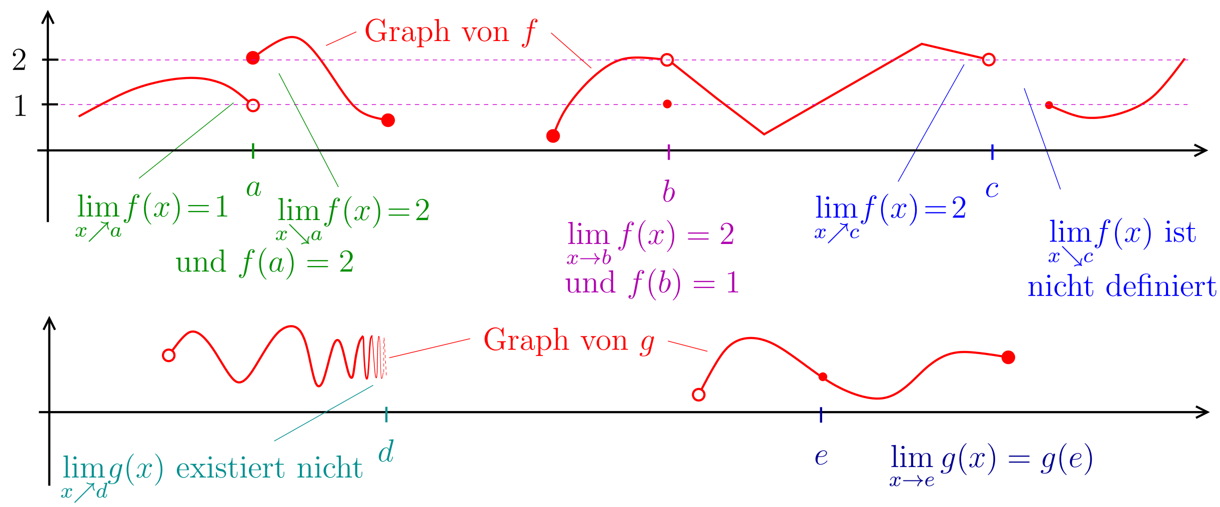
und wir nennen $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$ den *rechtsseitigen Grenzwert von f am Punkt x_0*.

(3) Wenn sowohl $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$ als auch $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$ definiert sind, und wenn die Grenzwerte übereinstimmen, dann schreiben wir

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \;:=\; \lim_{x \nearrow x_0} f(x) \;=\; \lim_{x \searrow x_0} f(x)$$

und wir nennen $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ den *Grenzwert am Punkt x_0*.

Beispiel. In der folgenden Abbildung zeigen wir den Graph zweier Funktionen und wir geben verschiedene links- und rechtsseitige Grenzwerte an. Man beachte, dass für Grenzwerte an einem Punkt x_0 die Funktion am Punkt x_0 gar nicht definiert sein muss. Wenn die Funktion doch am Punkt x_0 definiert ist, dann sind zudem die Funktionswerte am Punkt x_0 völlig irrelevant.



Beispiel. Wir betrachten die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\exp(x) - 1}{x} \qquad g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\exp(x)^2 - 1}{|x|} \qquad h\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\exp(x) - 1 - x}{x^2}.$$

Es stellt sich nun die Frage, ob die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ und $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ existieren, und wenn ja, ob wir die Grenzwerte bestimmen können. “Per Hand” ist das zumindest jeweils eine undankbare Aufgabe. Später werden wir eine elegante Methode kennenlernen um diese Fragen zu beantworten.

[63]Die Notation $x \searrow x_0$ soll suggestieren, dass x “von oben” gegen x_0 strebt.

Satz 7.9. *Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zudem sei $x_0 \in D$ ein Punkt, so dass es ein $\eta > 0$ mit $(x_0-\eta, x_0+\eta) \subset D$ gibt. Dann gilt*

$$f \text{ ist stetig im Punkt } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Beweis. Die Aussage folgt eigentlich sofort aus den Definitionen. Desto mehr man hinschreibt, desto verwirrender wird die Lage. Wir schreiben deswegen keine Details auf. ■

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^2+7, & \text{wenn } x < 3, \\ 5-x, & \text{wenn } x \geq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\lim_{x \nearrow 3} f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn die Funktionen } f \text{ und } x\mapsto x^2+7 \\ \text{stimmen für } x<3 \text{ überein}}}{=} \lim_{x\nearrow 3}(x^2+7) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dies folgt aus Satz 7.9, denn die Funktion} \\ x\mapsto x^2+7 \text{ ist stetig in } x=3}}{=} 3^2+7 = 16.$$

Wir führen nun noch einige weitere unterhaltsame Definitionen ein.

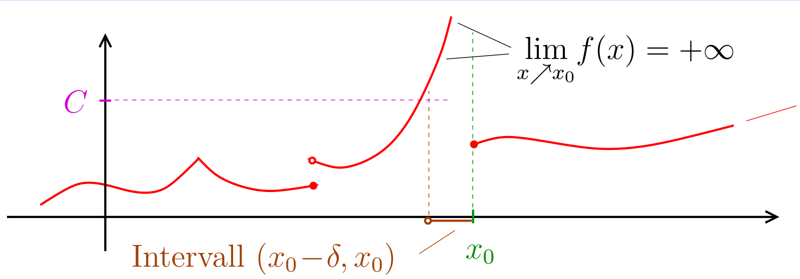
Definition. Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zudem sei $x_0 \in D$ ein Punkt, so dass es ein $\eta > 0$ mit $(x_0-\eta, x_0) \subset D$ gibt. Wir schreiben[64]

$$\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = +\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{C\in\mathbb{R}}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} \; \underset{\substack{x\in D \text{ mit} \\ x\in(x_0-\delta,x_0)}}{\forall} \; f(x) > C,$$

sowie

$$\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = -\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{C\in\mathbb{R}}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} \; \underset{\substack{x\in D \text{ mit} \\ x\in(x_0-\delta,x_0)}}{\forall} \; f(x) < C.$$

Ganz analog definieren wir auch $\lim\limits_{x\searrow x_0} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\searrow x_0} f(x) = -\infty$.



Der folgende Satz, welcher eng mit Satz 7.4 verwandt ist, erlaubt es Grenzwerte für Funktionen auf die uns vertrauten Grenzwerte von Folgen zurück zu führen.

[64] Die Definition ist inspiriert von der Definition von bestimmter Konvergenz von Folgen, siehe Seite 41.

Satz 7.10. *Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zudem sei $x_0 \in D$ ein Punkt, so dass es ein $\eta > 0$ mit $(x_0 - \eta, x_0) \subset D$ gibt. Für jedes $C \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ gilt:*

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = C \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{für jede Folge } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } D \cap (-\infty, x_0), \\ \text{mit } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0 \text{ gilt, dass } \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = C. \end{array}$$

Die analogen Aussagen gelten auch für $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$.

Beweis. Der Beweis ist ganz analog zum Beweis von Satz 7.4. Wir überlassen es der Leserschaft die Details auszuführen. ■

Für Grenzwerte von Funktionen gelten nun die gleichen Aussagen wie für Grenzwerte von Folgen:

Satz 7.11. *Es seien $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass es ein $\eta > 0$ gibt, so dass $(x_0 - \eta, x_0) \subset D$. Wenn $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ und $\lim\limits_{x \nearrow x_0} g(x) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ definiert sind, dann gilt*

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \lim\limits_{x \nearrow x_0} (f(x) + g(x)) & = & \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) + \lim\limits_{x \nearrow x_0} g(x) \\ (2) & \lim\limits_{x \nearrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) & = & \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \nearrow x_0} g(x), \end{array}$$

wenn *die Addition und Multiplikation auf der jeweiligen rechten Seite in den Tabellen auf Seite 42 definiert ist. Die gleichen Aussagen gelten analog auch für den rechtsseitigen Grenzwert $\lim\limits_{x \searrow x_0}$ und für den Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0}$.*

Beweis. Der Satz folgt sofort aus der Kombination von Satz 7.4 mit Satz 3.4 und Satz 3.10. ■

Bemerkung. Es gelten auch die offensichtlichen Analogien von Satz 3.4 (4), Satz 3.11 sowie Satz 3.14. Die Beweise sind dabei ganz ähnlich den ursprünglichen Beweisen.

Wir führen nun die letzten Definitionen von diesem Kapitel ein.

Definition. Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn es ein x_0 gibt, so dass $(x_0, \infty) \subset D$, dann schreiben wir für $a \in \mathbb{R}$, dass

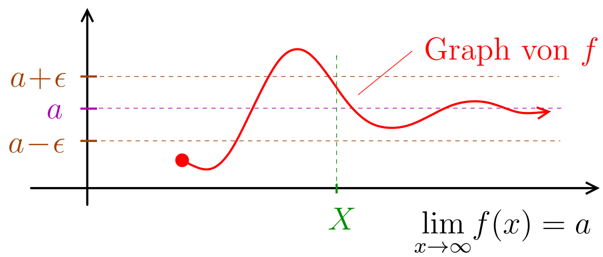
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall} \; \underset{X\in\mathbb{R}}{\exists} \; \underset{\substack{x \in D \text{ mit} \\ x \geq X}}{\forall} \; |f(x) - a| < \epsilon.$$

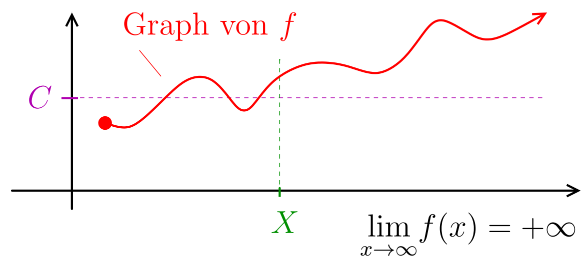
Wir bezeichnen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ als den *Grenzwert von f für x gegen $+\infty$*. Zudem definieren wir:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{C\in\mathbb{R}}{\forall} \; \underset{X\in\mathbb{R}}{\exists} \; \underset{\substack{x \in D \text{ mit} \\ x \geq X}}{\forall} \; f(x) > C.$$

Ganz analog definieren wir auch $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, sowie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Der folgende Satz ist das wenig überraschende Analogon zu Satz 7.10.





Satz 7.12. *Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass es ein x_0 gibt mit $(x_0,\infty) \subset D$. Für jedes $C \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ gilt:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; C \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{array}{c}\text{für jede Folge } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } D, \\ \text{mit } \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ gilt, dass } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = C.\end{array}$$

Die analogen Aussagen gelten auch für $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Beweis. Der Beweis ist ganz analog zum Beweis von Satz 7.4. Auch dieses mal überlesen wir es der Leserschaft die Details auszuführen. ■

Wir beschließen das Teilkapitel mit folgendem Lemma, welches ganz ähnlich wie Korollar 3.13 bewiesen wird.

Lemma 7.13. *Es seien $c_0,\dots,c_d \in \mathbb{R}$ mit $d \geq 1$ und $c_d \neq 0$. Dann gilt*

$$\lim_{x\to\infty}\left(c_0 + c_1\cdot x + c_2\cdot x^2 + \cdots + c_{d-1}\cdot x^{d-1} + c_d\cdot x^d\right) \;=\; \begin{cases} \infty, & \text{wenn } c_d > 0, \\ -\infty, & \text{wenn } c_d < 0. \end{cases}$$

7.7. **Gleichmäßige Stetigkeit.** Im Folgenden ist es hilfreich verschiedene Typen von Intervallen zu unterscheiden.

Definition. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) Ein Intervall vom Typ $[a,b]$, $[a,\infty)$ oder $(-\infty,a]$ heißt *abgeschlossen.*
(2) Ein Intervall vom Typ (a,b), (a,∞) oder $(-\infty,a)$ heißt *offen.*
(3) Ein *kompaktes Intervall* ist ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall, das heißt, ein Intervall vom Typ $[a,b]$.

In diesem Teilkapitel zeigen wir, dass Funktionen auf kompakten Intervallen gleichmäßig stetig sind. Die Definition von "gleichmäßig stetig" ist auf den ersten, und oft auch auf den zweiten Blick, verwirrend. Dieses Ergebnis über die gleichmäßige Stetigkeit wird aber im späteren Verlauf der Vorlesung noch eine wichtige Rolle spielen.

Wir erinnern an die Definition Stetigkeit. Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt:

$$f \text{ ist stetig} \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{x_0\in D}{\forall}\ \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{\substack{x\,\in\, D \text{ mit}\\ |x-x_0|<\delta}}{\forall}\ |f(x)-f(x_0)| < \epsilon.$$

In Abbildung 23 betrachten wir den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $x \in (0,\infty)$ und wir betrachten den Fall $\epsilon = \frac{1}{2}$. Wir sehen, dass es für $x_0 = a$ möglich ist ein deutlich größeres δ zu finden als für $x_0 = b$.

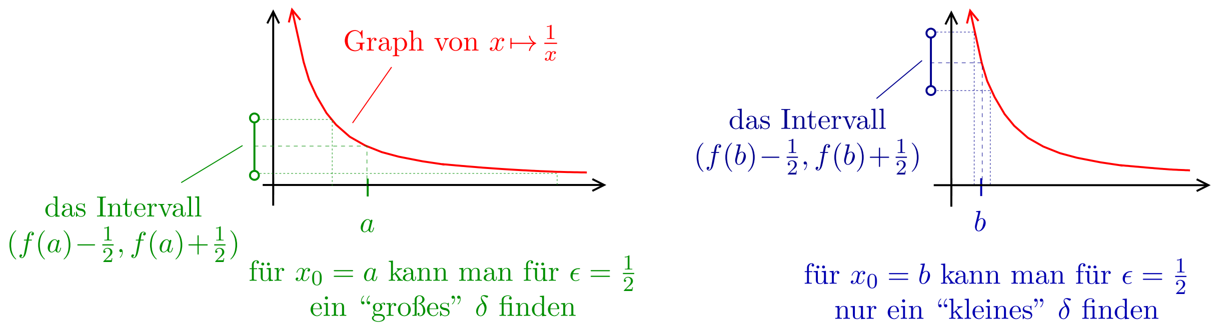


Abbildung 23.

Es wäre nun eigentlich praktisch, wenn man für gegebenes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ finden könnte, welches für alle $x_0 \in D$ funktioniert. Dies führt uns zu folgender Definition:

Definition. Es $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren:

$$f \text{ gleichmäßig stetig} \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x_0\in D}{\forall}\ \underset{\substack{x \in D \text{ mit} \\ |x-x_0|<\delta}}{\forall} \quad |f(x)-f(x_0)| < \epsilon.$$

Etwas vereinfacht ausgedrückt, eine Funktion f ist gleichmäßig stetig, wenn "es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, welches für alle x_0 passt".

Beispiel. Wir betrachten die Funktionen

$$\begin{array}{rcl} f\colon (0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x}, \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rcl} g\colon [0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x}. \end{array}$$

Es ist eine schöne Übungsaufgabe zu zeigen, dass die stetige Funktion $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ *nicht* gleichmäßig stetig ist und es ist eine genauso schöne Aufgabe zu zeigen, dass $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Während also stetige Funktionen auf (halb-) offenen Intervallen nicht gleichmäßig stetig sein müssen, ist die Lage für stetige Funktionen auf kompakten Intervallen viel zufriedenstellender:

Satz 7.14. *Jede stetige Funktionen, welche auf einem kompakten Intervall definiert ist, ist auch gleichmäßig stetig.*

Beweis. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir wollen zeigen, dass f auch gleichmäßig stetig. Wir werden den Satz mit einem Widerspruchsbeweis beweisen. Nehmen wir also an, dass f nicht gleichmäßig stetig ist. Dies bedeutet, dass

$$\underset{\mu>0}{\exists}\ \underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{y\in[a,b]}{\exists}\ \underset{\substack{x \in [a,b] \text{ mit} \\ |x-y|<\delta}}{\exists} \quad |f(x)-f(y)| \geq \mu.$$

Sei also solch ein $\mu > 0$ gewählt.

> Die Idee ist nun die Formulierung der Stetigkeit über Folgen, siehe Satz 7.4 ins Spiel zu bringen. Dazu brauchen wir eine konvergente Folge in $[a, b]$. Eine Folge erhalten wir erst einmal dadurch, dass wir die obige Aussage auf $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ anwenden. Diese Folge muss nicht notwendigerweise konvergieren. Aber mithilfe des Satzes 5.9 von Bolzano–Weierstraß erhalten wir eine konvergente Teilfolge. Das reicht für unsere Zwecke.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wenden wir die Aussage auf $\delta = \frac{1}{n}$ an und erhalten also $x_n, y_n \in [a, b]$, so dass gilt:

$$\text{(a)}\quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad \text{(b)}\quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \mu.$$

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt (weil sie in $[a, b]$ liegt), insbesondere existiert nach dem Satz 5.9 von Bolzano–Weierstraß eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, welche konvergiert. Wir setzen $c := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Behauptung. Es gilt auch $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = c$.

Nach (a) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$. Insbesondere gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, dass $x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k}$. Nachdem die linke und die rechte Folge gegen c konvergieren, folgt aus dem Sandwichsatz 3.8, dass auch die mittlere Folge y_{n_k} gegen c konvergiert. ⊞

Also gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \underbrace{f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})}_{|\ldots| \geq \mu \text{ nach (b)}} \overset{\substack{\text{folgt aus Satz 7.4, da } f \text{ stetig} \\ \downarrow}}{=} f\big(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\big) - f\big(\lim_{k\to\infty} y_{n_k}\big) = f(c) - f(c) = 0.$$

Dies ist aber nun ein Widerspruch, denn zum einen gilt nach (b) für alle $k \in \mathbb{N}$, dass $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \mu$, zum anderen wurde gerade gezeigt, dass die Folge gegen 0 konvergiert. ■

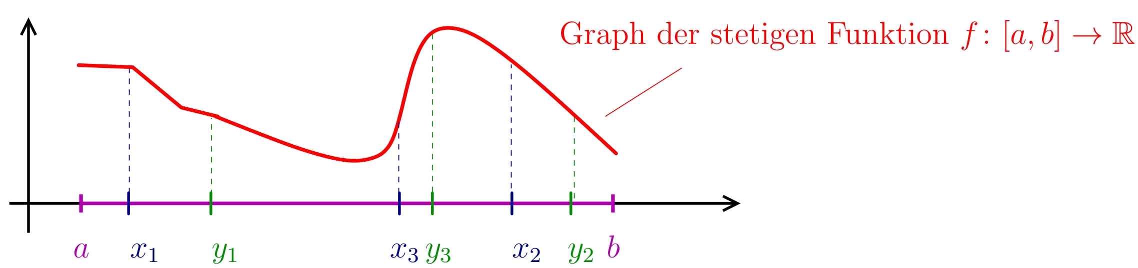


Abbildung 24. Skizze für den Beweis von Satz 7.14.

8. Der Zwischenwertsatz

Wir beginnen das Kapitel mit folgendem Satz.

Satz 8.1. (Beschränktheitssatz) *Jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervallen ist beschränkt. Mit anderen Worten, wenn $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, dann existiert ein $C \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in [a,b]$ gilt: $|f(x)| \leq C$.*

Beispiel. Die Aussage des Satzes gilt nicht, wenn wir stetige Funktionen auf nicht-kompakten Intervallen betrachten. Beispielsweise ist die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon (0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \qquad \text{stetig und unbeschränkt.}$$

Beweis. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir führen einen Widerspruchsbeweis durch, d.h. wir nehmen an, dass es kein solches C gibt. Mit anderen Worten wir nehmen an, dass gilt:

($*$) Für alle $C \in \mathbb{R}$ existiert ein $x \in [a,b]$ mit $|f(x)| > C$.

Wie im Beweis von Satz 7.14 wollen wir wieder die Formulierung der Stetigkeit über Folgen, siehe Satz 7.4 ins Spiel zu bringen. Dazu brauchen wir eine konvergente Folge in $[a,b]$. Eine Folge erhalten wir erst einmal dadurch, dass wir ($*$) auf $C = n$, $n \in \mathbb{N}$ anwenden. Die Folge $x_n \in [a,b]$, welche wir erhalten, muss nicht notwendigerweise konvergieren. Aber mithilfe des Satzes 5.9 von Bolzano–Weierstraß erhalten wir eine konvergente Teilfolge. Das reicht mal wieder für unsere Zwecke.

Aus ($*$) folgt, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a,b]$ gibt, so dass $|f(x_n)| > n$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen ist beschränkt, also existiert nach dem Satz 5.9 von Bolzano–Weierstraß eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, welche konvergiert. Wir setzen $x := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Nachdem $a \leq x_{n_k} \leq b$ folgt aus Satz 3.6, dass auch $a \leq x \leq b$, das heißt $x \in [a,b]$. Insbesondere sehen wir also, dass $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ im Definitionsbereich der Funktion f liegt. Wir sehen nun, dass gilt:

$$+\infty \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus } |f(x_{n_k})| > n_k \geq k}}{=} \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Satz 7.4, da } f \text{ stetig, und daher auch } |f| \text{ stetig ist}}}{=} \Big|f\Big(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\Big)\Big| = |f(x)|.$$

Wir haben also einen Widerspruch erhalten. ∎

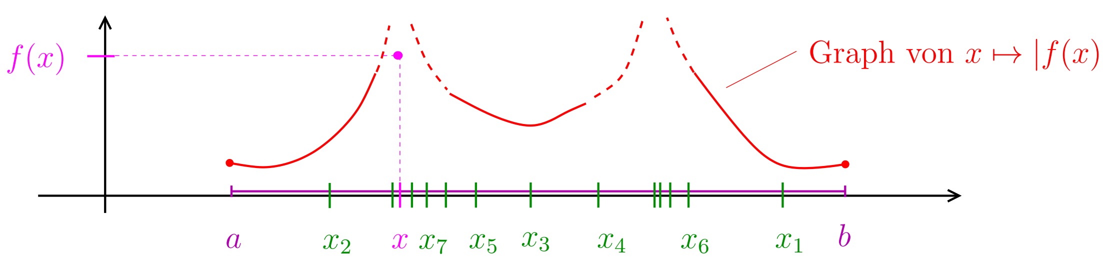


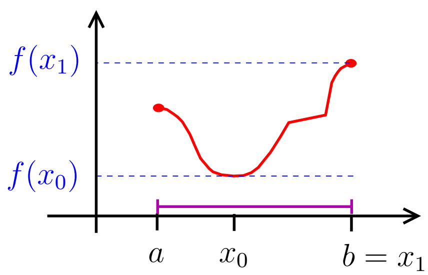
Abbildung 25. Skizze für den Beweis des Beschränktheitssatzes 8.1.

Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen:

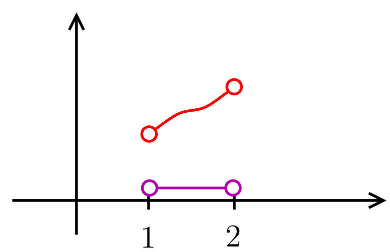
(1) *f besitzt ein Minimum*, wenn es ein $x_0 \in D$ gibt, so dass $f(x_0) \le f(x)$ für alle $x \in D$

(2) *f besitzt ein Maximum*, wenn es ein $x_1 \in D$ gibt, so dass $f(x_1) \ge f(x)$ für alle $x \in D$.

Beispiel. In der Abbildung sehen wir eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall $[a, b]$. Diese besitzt ein Minimum und ein Maximum. Wir sehen zudem eine stetige Funktion auf dem offenen Intervall $(1, 2)$, welche weder ein Minimum noch ein Maximum besitzt.



jede stetige Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ besitzt ein Maximum und ein Minimum



diese stetige Funktion $f\colon (1, 2) \to \mathbb{R}$ besitzt weder ein Maximum noch ein Minimum

Satz 8.2. (Satz über die Existenz von Maximum und Minimum) *Jede stetige Funktion auf einem nichtleeren kompakten Intervall besitzt ein Maximum und ein Minimum.*

Bemerkung. Satz 8.2 über die Existenz von Maximum und Minimum macht eine stärkere Aussage, als der Beschränktheitssatz 8.1. Wir haben den Beschränktheitssatz 8.1 zuerst formuliert und bewiesen, weil wir diesen im Beweis von Satz 8.2 verwenden werden.

Beweis. Es sei also $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ mit $a \le b$. Wir müssen zeigen, dass es $x_0, x_1 \in [a, b]$ gibt, so dass für alle $x \in [a, b]$:

$$f(x_0) \ \le \ f(x) \ \le \ f(x_1)$$

Wir zeigen zuerst die Existenz von x_1. Es folgt aus Satz 8.1, dass die Menge $f([a, b])$ beschränkt ist. Zudem ist die Menge nichtleer. Also existiert nach Satz 5.2 das Supremum $y_1 := \sup(f([a, b]))$. Es folgt nun aus Satz 5.3 (1), dass es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $f([a, b])$ gibt, welche gegen y_1 konvergiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir jetzt ein $c \in [a, b]$ mit $f(c_n) = z_n$.

Nachdem die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert nach dem Satz 5.9 von Bolzano–Weierstraß eine Teilfolge $(c_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, welche konvergiert. Wir setzen $x_1 := \lim\limits_{k\to\infty} c_{n_k}$. Wie im Beweis von Satz 8.1 sehen wir, dass $x_1 \in [a, b]$. Zudem gilt:

$$f(x_1) \ = \ f\Big(\lim_{k\to\infty} c_{n_k}\Big) \ \overset{\substack{\text{folgt aus Satz 7.4, da } f \text{ stetig} \\ \downarrow}}{=} \ \lim_{k\to\infty} f(c_{n_k}) \ = \ \lim_{k\to\infty} z_{n_k} \ \overset{\substack{\text{Lemma 5.8} \\ \downarrow}}{=} \ \lim_{n\to\infty} z_n \ = \ y_1 := \ \sup(f([a, b])).$$

Nachdem das Supremum $\sup(f([a, b]))$, per Definition, insbesondere eine obere Schranke für $f([a, b])$ ist, folgt nun, dass $f(x_1) \ge f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Ganz analog zeigt man auch die Existenz von x_0. ■

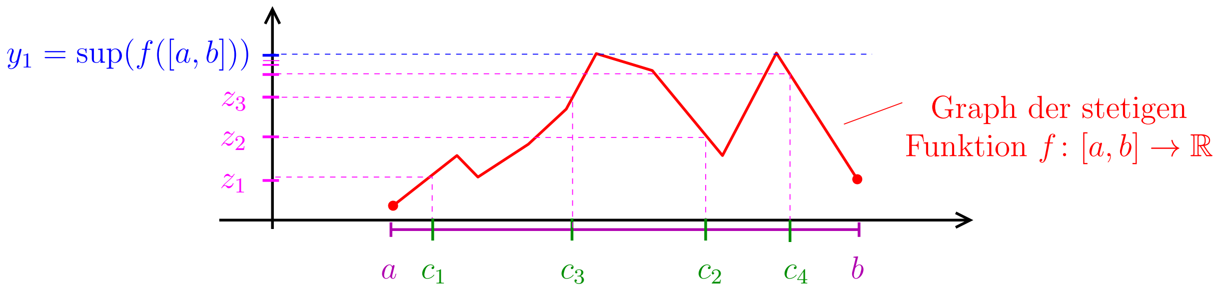


Abbildung 26. Skizze für den Beweis von Satz 8.2.

Der folgende Satz besagt insbesondere, dass eine stetige Funktion f auf einem kompakten Intervall $[a,b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ als Funktionswert annimmt.

Satz 8.3. (Zwischenwertsatz) *Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall I. Für jede Zahl y_0 zwischen zwei Funktionswerten $f(a)$ und $f(b)$ existiert ein x_0 zwischen a und b, so dass $f(x_0) = y_0$.*[65]

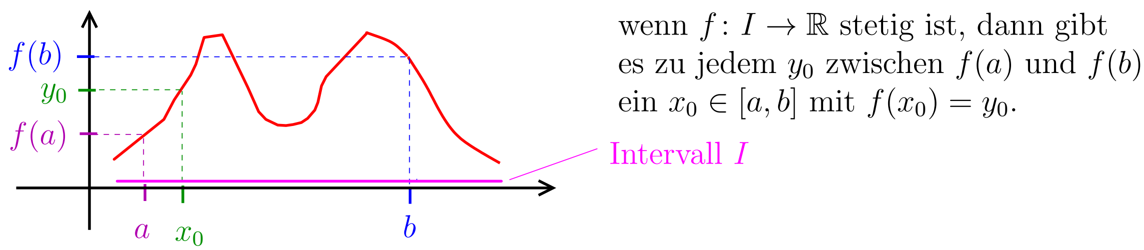


Abbildung 27. Veranschaulichung der Aussage des Zwischenwertsatzes.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 2. \end{aligned}$$

Dann gilt $f(0) < 0$ und $f(3) > 0$. Der Zwischenwertsatz also, dass es ein $x \in [0,3]$ mit $x^2 - 2 = 0$ gibt. Ganz analog kann man mithilfe des Zwischenwertsatzes zeigen, dass jedes $c \geq 0$ eine Quadratwurzel besitzt.

Beweis. Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall I. Es seien $a < b$ zwei Punkte in dem Intervall I. Wir betrachten nur den Fall, dass $f(a) \leq f(b)$, der Fall

[65] Wir sagen eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ *liegt zwischen s und t*, wenn Folgendes gilt:

(1) falls $s \leq t$, dann ist $r \in [s,t]$,
(2) falls $t \leq s$, dann ist $r \in [t,s]$.

$f(a) > f(b)$ wird fast genauso bewiesen. Es sei nun $y_0 \in [f(a), f(b)]$. Wir müssen zeigen, dass es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$ gibt.

> Wie wir gerade gesehen hatten, impliziert der Zwischenwertsatz, dass es Quadratwurzeln von nicht-negativen Zahlen gibt. Wir hatten die Existenz von Quadratwurzeln davor schon in Satz 5.7 bewiesen. Wie wir gleich sehen werden ist der Beweis des Zwischenwertsatzes fast identisch zu dem Beweis von Satz 5.7. Wir müssen hauptsächlich die Funktion $x \mapsto x^n$ durch unsere Funktion f ersetzen.

Wir setzen

$$M \;:=\; \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq y_0\}.$$

Nachdem $f(a) \leq y_0$ folgt, dass $a \in M$. Die Menge M ist also nichtleer. Die Menge ist zudem offensichtlich durch b nach oben beschränkt. Es folgt also aus Satz 5.2, dass M ein Supremum besitzt. Nach dem $\sup(M) \in [a, b]$ genügt es nun folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Für $x_0 := \sup(M)$ gilt $f(x_0) = y_0$.

Wir studieren $f(x_0)$ indem wir x_0 als Grenzwert von zwei Folgen schreiben:

(1) Nach Satz 5.3 (1) gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von *Zahlen in* M mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$.

(2) Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $b_n = \min\{x_0 + \frac{1}{n}, b\}$.

Dann gilt

$$y_0 \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } a_n \in M \text{ gilt } f(a_n) \leq y_0 \text{, die} \\ \text{Ungleichung folgt nun aus Satz 3.6}}}{\geq}\; \lim_{n\to\infty} f(a_n) \;\overset{\substack{\text{folgt aus Satz 7.4, da } f \text{ stetig} \\ \downarrow}}{=}\; f\Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big) \;=\; f(x_0) \;=\; f\Big(\lim_{n\to\infty} b_n\Big) \;\overset{\substack{\text{folgt aus Satz 7.4, da } f \text{ stetig} \\ \downarrow}}{=}\; \lim_{n\to\infty} f(b_n) \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } x_0 \text{ eine obere Schranke für } M \text{ ist,} \\ \text{gilt für alle } c \in (x_0, b] \text{, dass } f(c) > y_0, \\ \text{zudem gilt nach Voraussetzung, dass } f(b) \geq y_0, \\ \text{insbesondere gilt also } f(b_n) \geq y_0, \\ \text{die Ungleichung folgt nun wieder aus Satz 3.6}}}{\geq}\; y_0.$$

Wir haben also gezeigt, dass $y_0 \geq f(x_0) \geq y_0$. Also ist $f(x_0) = y_0$. ■

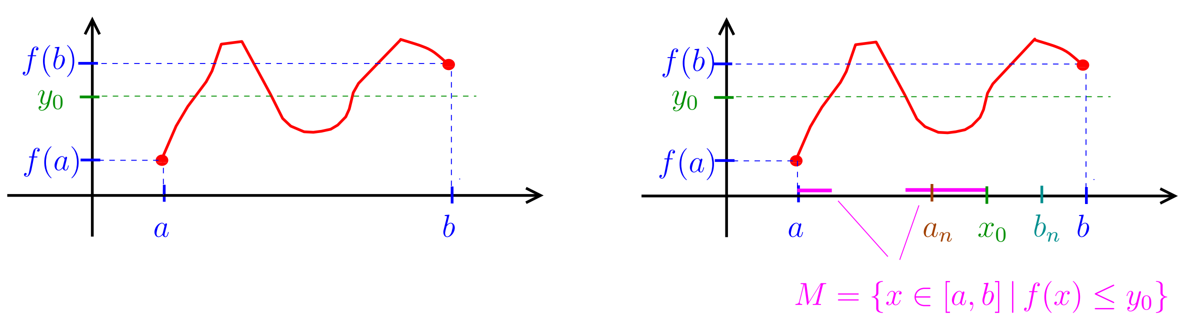


ABBILDUNG 28. Skizze zum Beweis des Zwischenwertsatzes.

In Übungsblatt 7 werden wir mithilfe des Zwischenwertsatzes folgenden Satz beweisen.

Satz 8.4. *Jede Polynomfunktion*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_k \cdot x^k \end{array}$$

von ungeradem Grad besitzt eine Nullstelle.

Beispiel. Der gerade formulierte Satz 8.4 impliziert also beispielsweise, dass die Polynomfunktion $f(x) = 3 - x^2 + 7x^3 - 2x^4 - 2x^5 + 3x^7$ eine Nullstelle besitzt. Der Satz macht aber keine Aussage ob oder wie man die Nullstellen berechnen kann. In der Algebravorlesung wird bewiesen, dass es für Polynomfunktionen von Grad ≥ 5 keine allgemeine Lösungsformel geben kann.

Wir beschließen das kurze Kapitel mit folgendem Satz, welchen wir in Übungsblatt 7 beweisen werden.

Satz 8.5. (Satz des moralischen Dilemmas) *Jede stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I, welche nur Werte in $\mathbb{Z}$ annimmt, ist konstant.*

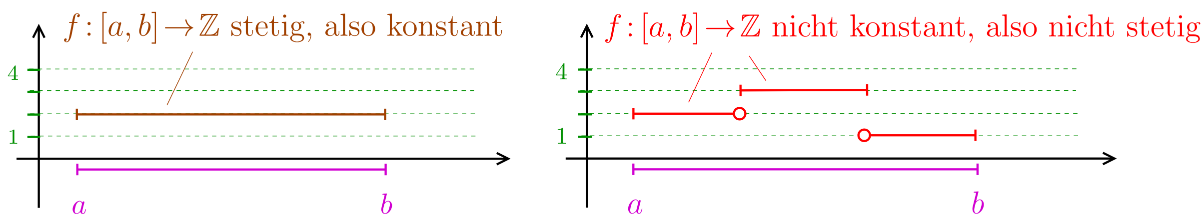


Abbildung 29.

Beispiel. In den Anwendungen ist folgende zu Satz 8.5 äquivalente Formulierung oft wichtiger: wenn eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{Z}$ nicht konstant ist, dann kann sie nicht stetig sein. Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{Z}$, welche nicht konstant sind gibt es in der Tat überall. Hier sind ein paar etwas salopp formulierte Beispiele:

$$\begin{array}{rcl} \text{Coronafunktion} \quad : [0, 1000] & \to & \mathbb{N}_0 \\ \text{Inzidenzwert von Stadt} & \mapsto & \text{Anzahl der Menschen, welche sich treffen dürfen} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Bestrafungsfunktion} \quad : [0, 1000000] & \to & \mathbb{N}_0 \\ \text{Wert von gestohlenem Gut} & \mapsto & \text{Anzahl der Monate im Gefängnis} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Notenfunktion} \quad : [0, 100] & \to & \{1,2,3,4,5,6\} \\ \text{Punkte in Klausur} & \to & \text{Note in Klausur} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Rechtefunktion} \quad : [0, 100] & \to & \mathbb{N}_0 \\ \text{Lebensalter} & \to & \text{Anzahl der Führerscheine, welche man machen darf} \end{array}$$

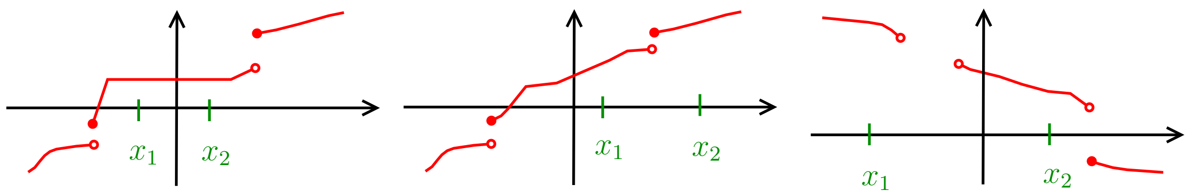
In allen Fällen ist die Funktion nicht-konstant, damit nach Satz 8.5 nicht-stetig und damit letztendlich ungerecht.

9. Umkehrfunktionen

9.1. (Streng) monotone Funktionen.

Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(1) f heißt *monoton steigend*, wenn für $x_1, x_2 \in D$ gilt: $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$,
(2) f heißt *streng monoton steigend*, wenn für $x_1, x_2 \in D$ gilt: $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$,
(3) f heißt *monoton fallend*, wenn für $x_1, x_2 \in D$ gilt: $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$,
(4) f heißt *streng monoton fallend*, wenn für $x_1, x_2 \in D$ gilt: $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$.



eine monoton steigende Funktion — eine streng monoton steigende Funktion — eine streng monoton fallende Funktion

Abbildung 30.

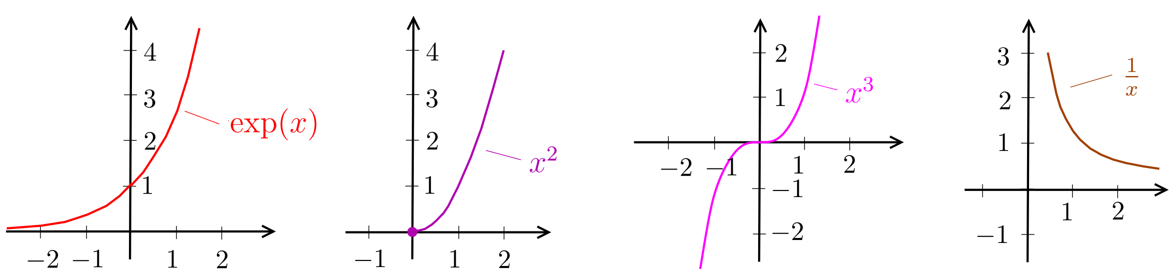
Lemma 9.1.

(1) *Die Exponentialfunktion* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton steigend.*
(2) *Es sei* $k \in \mathbb{N}$. *Die Funktionen*

$$\text{(a)}\quad \begin{aligned}[0,\infty) &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto x^k\end{aligned} \qquad \textit{und} \qquad \text{(b)}\quad \begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto x^{2k+1}\end{aligned} \qquad \textit{sind streng monoton steigend.}$$

Zudem ist die Funktion

$$\text{(c)}\quad \begin{aligned}(0,\infty) &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \tfrac{1}{x^k}\end{aligned} \qquad \textit{streng monoton fallend.}$$



Beweis (∗).

(1) Es seien also $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 > x_2$. Dann gilt

$$\exp(x_1) = \exp(x_2 + (x_1 - x_2)) \underset{\uparrow}{=} \exp(x_2) \cdot \exp(x_1 - x_2) \underset{\uparrow}{>} \exp(x_2).$$

Funktionalgleichung, siehe Theorem 6.18 — es ist $x_1 > x_2$, also $x_1 - x_2 > 0$, also folgt aus Satz 6.19 (3), dass $\exp(x_1 - x_2) > 1$

(2) Die Aussagen folgen leicht aus den Ordnungsaxiomen und Satz 1.17 (2) und (3). Das Austüfteln der Details führt zu mehr Verwirrung als Erkenntnis, und wir beenden damit auch schon wieder den Beweis. ■

Mithilfe des folgenden Lemmas können wir für monotone Funktionen in vielen Fällen den Wertebereich ohne großen Aufwand bestimmen.

Lemma 9.2. *Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige, monoton steigende Funktion.*

(1) *Wenn $[a,b] \subset D$ ein kompaktes Intervall ist, dann ist $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.*
(2) *Wenn $(a,b) \subset D$ ein offenes Intervall ist, wobei $-\infty \le a < b \le \infty$, dann ist*[66][67]

$$f\big((a,b)\big) \;=\; \big(\lim_{x\searrow a} f(x)\;,\;\lim_{x\nearrow b} f(x)\big).$$

Zudem gelten die offensichtlichen Abänderungen für Intervalle vom Typ $(a,b]$, $[a,b)$, $(-\infty,b]$ sowie $[a,\infty)$.

Wenn f monoton fallend ist, dann gelten die gleichen Aussagen, allerdings mit den Grenzen der Intervalle vertauscht.

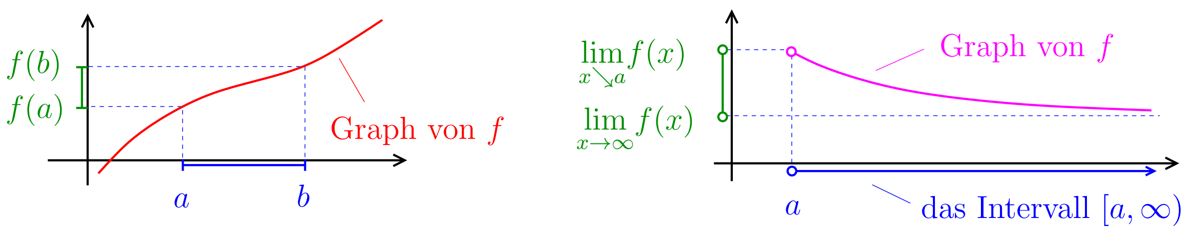


Abbildung 31. Illustration von Lemma 9.2.

Beispiel. Wir betrachten die monoton fallende Funktion

$$\begin{aligned} f\colon (0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tfrac{1}{x}. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$f([1,\infty)) \underset{\uparrow}{=} \big(\lim_{x\to\infty} f(x)\;,\; f(1)\big] \;=\; \big(\lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{x}\;,\;1\big] \;=\; (0,1].$$

folgt aus Lemma 9.2, da f streng monoton *fallend*, werden die Grenzen allerdings vertauscht

Beweis. Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion.

(1) Es sei $[a,b] \subset D$ ein kompaktes Intervall. Wir sollen zeigen, dass $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. In diesem Fall haben wir also zwei Mengen X und Y gegeben, und wir wollen zeigen, dass $X = Y$. Es genügt zu zeigen, dass $X \subset Y$ und $X \supset Y$. Wenn man nun zeigen will, dass $X \subset Y$, dann muss man zeigen, dass jedes $x \in X$ auch in Y enthalten ist.

---

[66] Hierbei interpretieren wir natürlich $\lim_{x\searrow -\infty} f(x)$ als $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ und ganz analog $\lim_{x\nearrow\infty} f(x)$ als $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

[67] Wie in Satz 3.15 und Satz 4.3 kann man zeigen, dass die "Grenzwerte" in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existieren.

($\subset$) Wir zeigen zuerst, dass $f([a,b]) \subset [f(a), f(b)]$. Dies folgt aus folgender Beobachtung:

$$x \in [a,b] \implies a \le x \le b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } f \text{ ist monoton steigend}}}{\implies} f(a) \le f(x) \le f(b) \implies f(x) \in [f(a), f(b)].$$

($\supset$) Wir zeigen nun, dass $f([a,b]) \supset [f(a), f(b)]$. Es sei also $y \in [f(a), f(b)]$. Der Zwischenwertsatz 8.3 besagt, dass es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$ gibt. Also ist $y \in f([a,b])$.

(2) $(*)$ Es sei beispielsweise $[a, \infty) \subset D$ ein halb-offenes, unbeschränktes Intervall mit der Eigenschaft, dass $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Dann gilt

$$f([a,\infty)) = f\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [a,n]\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{allgemein gilt für eine beliebige} \\ \text{Abbildung } g, \text{ dass } g(X\cup Y)=g(X)\cup g(Y)}}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f([a,n]) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach dem ersten Fall}}}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [f(a), f(n)] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } f \text{ monoton steigend} \\ \text{und da } \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty}}{=} [f(a), \infty).$$

Die anderen Aussagen werden ganz analog bewiesen. ■

9.2. **Die Definition von Umkehrfunktionen.** Wir erinnern an folgende Definition von Seite 58.

Definition. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen zwei Mengen heißt *injektiv*, wenn für alle $x_1 \neq x_2 \in X$ gilt, dass auch $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Beispiel. Es folgt eigentlich sofort aus den Definitionen, dass jede streng monotone Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ injektiv ist. Man sieht das auch gut in Abbildung 30.

Definition. Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine injektive Funktion. Dann existiert zu jedem $a \in f(D)$ genau ein $b \in D$ mit der Eigenschaft $f(b) = a$. Dieses b wird mit $f^{-1}(a)$ bezeichnet und die Funktion[68]

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon f(D) &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto f^{-1}(a) = \text{das einzige } b \in D \text{ mit } f(b) = a \end{aligned}$$

heißt die *Umkehrfunktion von f*. Insbesondere gilt für $a \in f(D)$ und $b \in D$:

$$(*) \qquad f^{-1}(a) = b \iff f(b) = a.$$

Lemma 9.3. *Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine injektive Funktion.*

(1) *für alle $x \in D$ gilt:* $f^{-1}(f(x)) = x$,
(2) *für alle $y \in f(D)$ gilt:* $f(f^{-1}(y)) = y$.

Beweis.

(1) Es sei $x \in D$. Es folgt aus $(*)$, angewandt auf $a = f(x)$ und $b = x$, dass $f^{-1}(f(x)) = x$.

[68]Die Umkehrfunktion f^{-1} besitzt den Wertebereich D, wir könnten also auch etwas genauer schreiben $f^{-1}\colon f(D) \to D$ anstatt $f^{-1}\colon f(D) \to \mathbb{R}$.

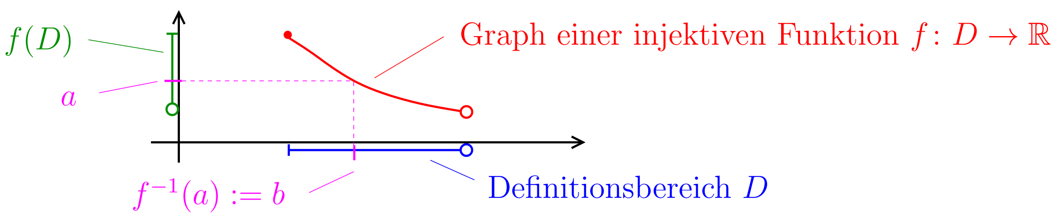


Abbildung 32.

(2) Es sei $y \in f(D)$. Es folgt nun aus $(*)$, angewandt auf $a = y$ und $b = f^{-1}(y)$, dass $f(f^{-1}(y)) = y$. ■

Lemma 9.4. *Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine injektive Funktion. Dann gilt:*

$$\mathrm{Graph}(f^{-1}) \;=\; \textit{Spiegelbild von } \mathrm{Graph}(f) \textit{ bezüglich der } x = y\textit{–Diagonale.}$$

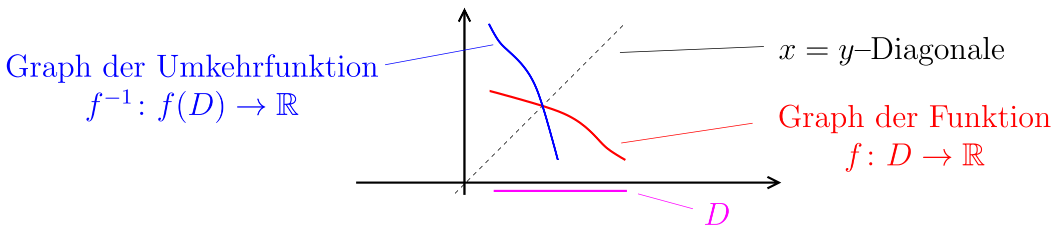


Abbildung 33. Illustration von Lemma 9.4.

Beweis $(*)$. Zur Erinnerung: Der Graph einer Funktion $g\colon E \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\mathrm{Graph}(g) \;:=\; \{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in E\}.$$

Wir wenden uns nun dem eigentlichen Beweis des Lemmas zu. Es sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$(x,y) \in \mathrm{Graph}(f^{-1}) \iff y = f^{-1}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach } (*)}}{\iff} f(y) = x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } (y,x) = (y, f(y)).}}{\iff} (y,x) \in \mathrm{Graph}(f).$$

Wir sehen also, dass wir den Graphen von f^{-1} aus dem Graphen von f durch Vertauschen der x- und der y-Koordinate erhalten. Anders ausgedrückt, wir erhalten den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1}, indem wir den Graphen von f an der $x = y$–Diagonale spiegeln. ■

Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir mehrmals folgendes Lemma verwenden.

Lemma 9.5. *Wenn $f\colon D \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend (bzw. fallend) ist, dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(D) \to \mathbb{R}$ ebenfalls streng monoton steigend (bzw. fallend).*

Beweis $(*)$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $f\colon D \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend ist. Wir wollen zeigen, dass dann auch $f^{-1}\colon f(D) \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend ist. Für

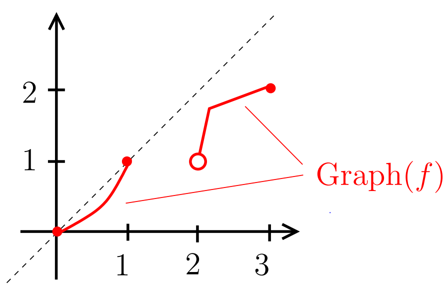
$y_1, y_2 \in f(D)$ gilt dann:

$$y_1 < y_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aus Lemma 9.3 folgt } f(f^{-1}(y_i)) = y_i}}{\iff} f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } f \text{ streng monoton steigend}}}{\iff} f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2).$$

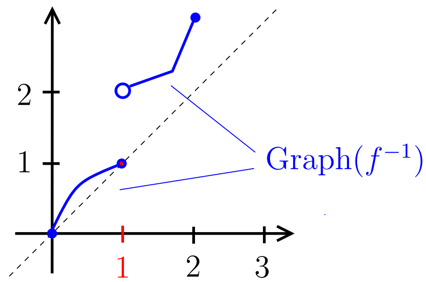
Wir haben also gezeigt, dass $f^{-1}\colon f(D) \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend ist. Der Fall, dass $f\colon D \to \mathbb{R}$ streng monoton fallend ist, wird ganz analog bewiesen. ■

9.3. **Stetigkeit von Umkehrfunktionen.** Es stellt sich also nun folgende Frage: wenn $f\colon D \to \mathbb{R}$ injektiv ist, und wenn f stetig ist, folgt dann, dass die Umkehrfunktion f^{-1} ebenfalls stetig ist? Das folgende Beispiel zeigt, dass die Antwort im Allgemeinen Nein ist.

Beispiel. In Abbildung sehen wir den Graphen einer Funktion $f\colon [0,1] \cup (2,3] \to \mathbb{R}$, welche sowohl stetig als auch injektiv ist. Wir sehen zudem den Graph der Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [0,2] \to \mathbb{R}$. Die Umkehrfunktion ist im Punkt $x_0 = 1$ jedoch *nicht* stetig.



die Funktion f ist stetig
und injektiv



die Umkehrfunktion f^{-1}
ist im Punkt $x_0 = 1$ *nicht* stetig

Wir sehen also, dass die Umkehrfunktion im Allgemeinen nicht stetig ist, aber wir sehen auch, dass zumindest in dem obigen Beispiel die Nicht-Stetigkeit von f^{-1} an der "Zerissenheit" des Definitionsbereiches von f liegt. Wir werden deswegen im Folgenden Funktionen betrachten, welche auf einem Intervall definiert sind.

Satz 9.6. (Satz von der Stetigkeit der Umkehrfunktion) *Wenn $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine streng monotone Funktion, welche auf einem Intervall I definiert ist,*[69] *dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(I) \to \mathbb{R}$ stetig.*

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $I = \mathbb{R}$, und dass $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende Funktion ist. Es sei also $y_0 \in f(\mathbb{R})$. Wir wollen zeigen, dass f^{-1} stetig im Punkt y_0 ist. Wir setzen $x_0 := f^{-1}(y_0)$. Wir wollen also zeigen, dass

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{y\in(y_0-\delta,y_0+\delta)}{\forall}\ f^{-1}(y) \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon).$$

[69]Wir setzen hier also *nicht* voraus, dass f stetig ist. Dies ist kein Fehler. Wenn f streng monoton ist, dann ist die Umkehrfunktion stetig, selbst wenn f selber nicht stetig ist. Es ist vielleicht hilfreich mal explizit den Graphen von solchen Funktionen aufzuzeichnen.

Es sei nun $\epsilon > 0$. Nachdem f streng monoton steigend ist, folgt, dass

$$f(x_0 - \epsilon) \; < \; y_0 \; = \; f(x_0) \; < \; f(x_0 + \epsilon).$$

Wir wählen nun ein $\delta > 0$, so dass [70]

$$(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \; \subset \; (f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon)).$$

Dann gilt für $y \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned} y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \; &\Rightarrow \; y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wahl von } \delta}}{\Rightarrow} \; f(x_0 - \epsilon) < y < f(x_0 + \epsilon) \; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aus Lemma 9.5 folgt, dass } f^{-1} \text{ streng monoton steigend ist}}}{\Rightarrow} \; f^{-1}(f(x_0 - \epsilon)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(x_0 + \epsilon)) \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Lemma 9.3}}}{\Rightarrow} \; x_0 - \epsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \epsilon \; \Rightarrow \; f^{-1}(y) \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon). \end{aligned}$$

Wir müssen nun noch die Fälle betrachten, dass I ein beliebiges Intervall ist, oder dass

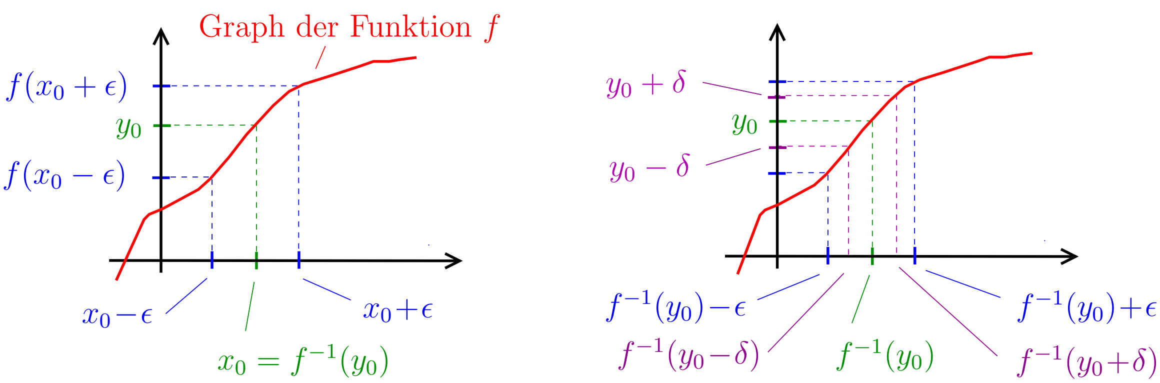


ABBILDUNG 34. Skizze für den Beweis von Satz 9.6.

f streng monoton fallend ist. Diese Fälle werden ganz ähnlich bewiesen und sind eine freiwillige Übungsaufgabe. ■

9.4. **Die Wurzelfunktionen.** Es sei $k \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 9.1 ist die Funktion

$$\begin{aligned} f \colon [0, \infty) \; &\to \; \mathbb{R} \\ x \; &\mapsto \; x^k \end{aligned}$$

streng monoton steigend und wir hatten in Satz 7.6 gesehen, dass diese Funktion stetig ist. Zudem gilt

$$f([0,\infty)) \overset{\substack{\text{folgt aus Lemma 9.2, da } f \text{ streng monoton steigend} \\ \downarrow}}{=} \left[f(0), \lim_{x\to\infty} f(x)\right) = \left[0, \lim_{x\to\infty} x^k\right) \overset{\substack{\text{Lemma 7.13} \\ \downarrow}}{=} [0,\infty).$$

Die zugehörige Umkehrfunktion

[70] Beispielsweise könnten wir $\delta := \min\{f(x_0 + \epsilon) - y_0, y_0 - f(x_0 - \epsilon)\}$ setzen.

$$\begin{array}{rcl} [0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f^{-1}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus der Definition von } \sqrt[k]{x} \text{ auf Seite 68}}}{=} \sqrt[k]{x} \end{array}$$

heißt die *k-te Wurzelfunktion*. Es folgt aus Satz 9.6, dass die Umkehrfunktion stetig ist.

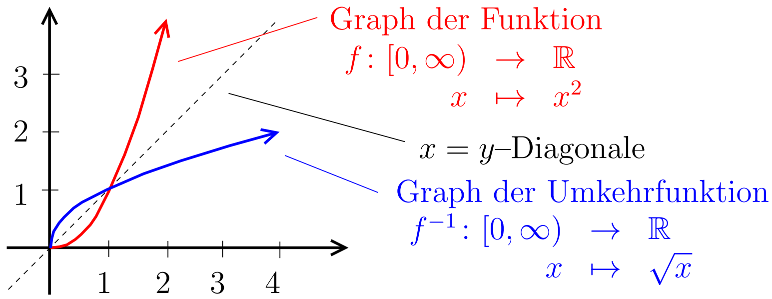


Abbildung 35.

9.5. **Die Logarithmusfunktionen.** Wir fassen zuerst die wichtigsten Eigenschaften der Exponentialfunktion zusammen.

Satz 9.7. *Die Exponentialfunktion*
$$\begin{array}{rcl} \exp\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} \end{array}$$
besitzt folgende Eigenschaften:

(1) $\exp(0) = 1$,
(2) $\exp(1) =: e$ *ist die Eulersche Zahl, es gilt* $e \approx 2.718281828\ldots$,
(3) *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ (*Funktionalgleichung*).
(4) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
(5) *Für alle* $n \in \mathbb{Z}$ *gilt* $\exp(n) = e^n$.
(6) *Für alle* $x \in (-\infty, 0)$ *gilt* $\exp(x) \in (0,1)$ *und für alle* $x \in (0,\infty)$ *gilt* $\exp(x) \in (1,\infty)$.
(7) *Die Exponentialfunktion ist streng monoton steigend.*
(8) *Die Exponentialfunktion ist stetig.*
(9) *Es ist* $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty$ *und* $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.
(10) $\exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$.

Beweis.

(1)-(8) Die ersten acht Aussagen haben wir in Theorem 6.18, Satz 6.19, Satz 7.8 und Lemma 9.1 bewiesen.

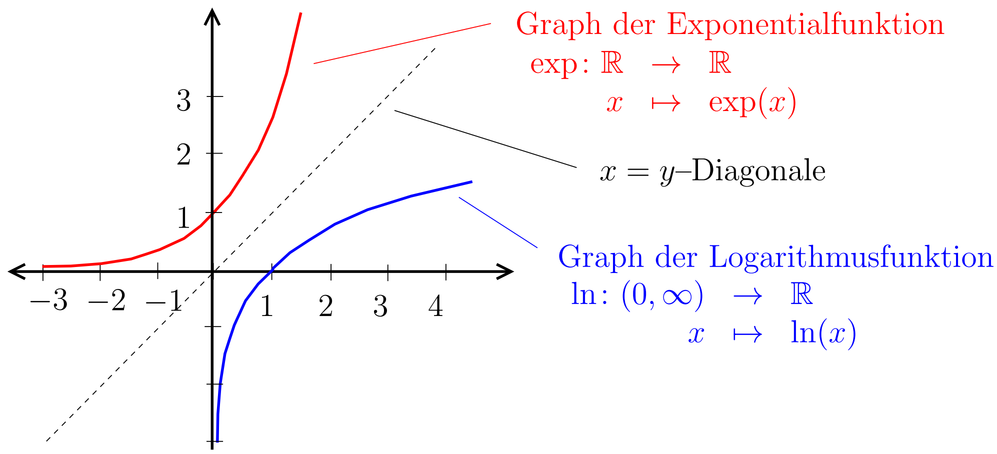
(9) (a) Es folgt aus (5), dass die Funktionswerte der Exponentialfunktion nach oben unbeschränkt sind. Es folgt nun aus der strengen Monotonie der Exponentialfunktion, ganz ähnlich wie in Satz 3.15, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty$.

(b) Diese Aussage folgt (9a), der Eigenschaft (4) und dem Analogon zu Satz 3.11.

(10) Es ist

$$\exp(\mathbb{R}) = \exp((-\infty,\infty)) \underset{\text{folgt aus Lemma 9.2, da exp monoton steigend}}{\overset{\downarrow}{=}} \Big(\lim_{x\to-\infty}\exp(x), \lim_{x\to\infty}\exp(x)\Big) \underset{\text{folgt aus (9)}}{\overset{\downarrow}{=}} (0,\infty). \quad \blacksquare$$

Definition. Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion exp wird die *Logarithmusfunktion* $\ln\colon (0,\infty)\to\mathbb{R}$ genannt.



Satz 9.8. *Die Logarithmusfunktion*
$$\begin{aligned}\ln\colon (0,\infty) &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \ln(x)\end{aligned}$$
hat folgende Eigenschaften:

(0) *Für alle* $x\in\mathbb{R}$ *gilt* $\ln(\exp(x)) = x$ *und für alle* $x\in(0,\infty)$ *gilt* $\exp(\ln(x)) = x$.
(1) $\ln(1) = 0$.
(2) $\ln(e) = 1$.
(3) *Für alle* $x,y\in(0,\infty)$ *gilt* $\ln(x\cdot y) = \ln(x)+\ln(y)$ (*Funktionalgleichung*).
(4) *Für alle* $x\in(0,\infty)$ *gilt* $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$.
(5) *Für alle* $n\in\mathbb{N}$ *gilt* $\ln(e^n) = n$.
(6) *Für alle* $x\in(0,1)$ *ist* $\ln(x)\in(-\infty,0)$ *und für alle* $x\in(1,\infty)$ *ist* $\ln(x)\in(0,\infty)$.
(7) *Die Logarithmusfunktion ist streng monoton steigend.*
(8) *Die Logarithmusfunktion ist stetig.*
(9) *Es ist* $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x) = +\infty$ *und* $\lim\limits_{x\searrow 0}\ln(x) = -\infty$.

Beweis.

(0) Diese Aussage folgt aus Lemma 9.3.
(1) Es ist $\ln(1) = \ln(\exp(0)) = 0$.
(2) Es ist $\ln(e) = \ln(\exp(1)) = 1$.
(3) Es seien also $x,y\in(0,\infty)$. Dann gilt

$$\ln(x\cdot y) \underset{\text{folgt aus (0)}}{\overset{\uparrow}{=}} \ln(\exp(\ln(x))\cdot\exp(\ln(y))) \underset{\text{folgt aus Satz 9.7 (3)}}{\overset{\uparrow}{=}} \ln(\exp(\ln(x)+\ln(y))) \underset{\text{folgt aus (0)}}{\overset{\uparrow}{=}} \ln(x)+\ln(y).$$

(4) Es sei $x \in (0,\infty)$. Dann gilt

$$0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (1)}}}{=} \ln(1) = \ln(x \cdot \tfrac{1}{x}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (3)}}}{=} \ln(x) + \ln(\tfrac{1}{x}), \qquad \text{also ist } \ln(\tfrac{1}{x}) = -\ln(x).$$

(5) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Es ist $\ln(e^n) = \ln(\exp(n)) = n$.
(6) Die Aussage folgt sofort aus Satz 9.7 (6).
(7) Nachdem die Exponentialfunktion streng monoton steigend ist, folgt aus Lemma 9.5, dass die Logarithmusfunktion ebenfalls streng monoton steigend ist.
(8) Nachdem die Exponentionalfunktion streng monoton steigend und auf dem Intervall $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ definiert ist, folgt aus Satz 9.6, dass die Logarithmusfunktion stetig ist.
(9) (a) Es folgt aus (5), dass für beliebiges $C \in \mathbb{R}$ gilt: $\ln(\exp(C)) = C$. Dies impliziert, dass die Logarithmusfunktion ln nach oben unbeschränkt ist. Nachdem die Logarithmusfunktion zudem streng monoton steigend ist, folgt, ganz ähnlich wie in Satz 3.15, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty$.
(b) Es ist

$$\lim_{x\searrow 0} \ln(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{die Aussage gilt für alle Funktionen} \\ \text{und folgt leicht aus den Definitionen}}}{=} \lim_{x\to\infty} \ln(\tfrac{1}{x}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (4)}}}{=} \lim_{x\to\infty} -\ln(x) = -\lim_{x\to\infty} \ln(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Aussage (9a)}}}{=} -\infty.$$

■

9.6. **Potenzen von reellen Zahlen.** Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Auf Seite 13 hatten wir definiert:

$$a^n := \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n-\text{Mal}}, \quad \text{sowie } a^0 := 1 \text{ und für } a \neq 0 \text{ hatten wir definiert } a^{-n} := \frac{1}{a^n}.$$

Wir wollen nun den Bereich der möglichen Exponenten erweitern. Es sei beispielsweise $s = \frac{p}{q}$, mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$, eine rationale Zahl, dann können wir für $a \in (0,\infty)$ folgende Definition einführen:

$$a^s := a^{\frac{p}{q}} := (\sqrt[q]{a})^p, \quad \text{wobei die } q\text{-te Wurzel } \sqrt[q]{x} \text{ für } x \geq 0 \text{ auf Seite 68 definiert wurde.}$$

Für $a = 2$ wird der Graph der Funktion $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2^x$ in Abbildung 36 skizziert. Der Graph legt nahe, dass man diese Funktion auch als eine stetige Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen kann. Mit anderen Worten, es sollte möglich sein a^x für jeden Exponenten $x \in \mathbb{R}$ "vernünftig" definieren zu können. Wir führen dies nun mit folgender, vielleicht überraschenden Definition durch.

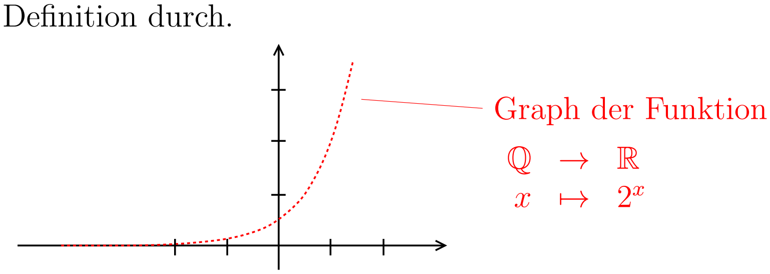


Abbildung 36.

Definition. Es sei $a \in (0,\infty)$ und $x \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$a^x \;:=\; \exp(x \cdot \ln(a)).$$

Beispiel.

(1) Nachdem $\ln(e) = 1$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, dass $e^x = \exp(x)$.
(2) Wir haben jetzt also Potenzen a^x für beliebige $a \in (0,\infty)$ und $x \in \mathbb{R}$ definiert. Beispielsweise haben wir jetzt definiert, was $(2+\sqrt{2})^{-e+\sqrt{3}}$ sein soll.

Der folgende Satz besagt nun, dass die Definition von "a hoch x" alle Eigenschaften erfüllt, die man erwarten würde. Der Satz kann insbesondere als Verallgemeinerung von Satz 1.12 aufgefasst werden.

Satz 9.9. (Potenzregeln)

(1) *Es seien $a, b \in (0,\infty)$ und $x, y \in \mathbb{R}$, zudem sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:*

$$\begin{array}{llcl} \text{(a)} & a^0 & = & 1, \\ \text{(b)} & a^x \cdot a^y & = & a^{x+y} \\ \text{(c)} & a^{-x} & = & \frac{1}{a^x} \end{array} \qquad \begin{array}{llcl} \text{(d)} & (a^x)^y & = & a^{xy} \\ \text{(e)} & a^x \cdot b^x & = & (ab)^x \\ \text{(f)} & a^n & = & \underbrace{a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{-Mal}}. \end{array}$$

(2) *Für $a \in (0,\infty)$ und $s = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ gilt $a^s \;=\; (\sqrt[q]{a})^p$.*
(3) *Für jedes $a \in (0,\infty)$ ist die Funktion*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & a^x \end{array} \qquad \textit{stetig.}$$

Bemerkung. Es folgt aus Satz 9.9 (2), dass die zwei Definitionen von Potenzen a^s mit rationalem Exponenten $s \in \mathbb{Q}$ übereinstimmen.

Beweis. Es seien also $a, b \in (0,\infty)$ und $x, y \in \mathbb{R}$.

(1) (a) Es ist $a^0 = \exp(\ln(a) \cdot 0) = \exp(0) = 1$.
(b) Es ist

$$\begin{array}{rcccl} a^x \cdot a^y & \overset{\substack{\text{per Definition}\\ \downarrow}}{=} & \exp(x \cdot \ln a) \cdot \exp(y \cdot \ln a) & \overset{\substack{\text{Funktionalgleichung}\\ \downarrow}}{=} & \exp(x \cdot \ln a + y \cdot \ln a) \\ & & & = & \exp((x+y) \cdot \ln a) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{per Definition}}}{=} a^{x+y}. \end{array}$$

(c)-(e) Diese drei Aussagen folgen ebenfalls leicht aus den Definitionen und den Eigenschaften der Exponentialfunktion und der Logarithmusfunktion. Diese Aussagen werden im 8. Übungsblatt bewiesen.
(f) Es ist

$$a^n \;=\; a^{1+\cdots+1} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus (b)}}}{=} \overbrace{a \cdot \cdots \cdot a}^{n\text{-Mal}}.$$

(2) Es seien $a \in (0,\infty)$ und $s = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Dann gilt

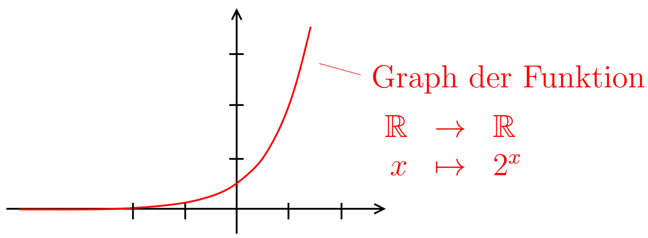
$$(a^{\frac{p}{q}})^q \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (1d)}}}{=} a^{\frac{p}{q}\cdot q} = a^p \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } \sqrt[q]{a}}}{=} ((\sqrt[q]{a})^q)^p.$$

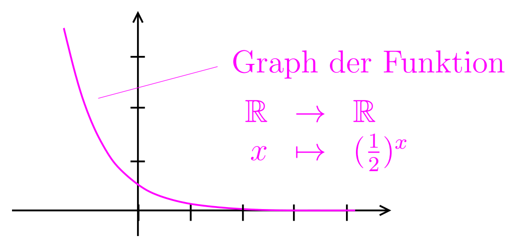
Da $x \mapsto x^p$ auf $[0,\infty)$ injektiv ist, folgt, dass $a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p$.

(3) Es sei $a \in (0,\infty)$. Wir sollen zeigen, dass die Funktion

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a^x = \exp(x \cdot \ln(a)) \end{array}$$

stetig ist. Diese Funktion ist die Verknüpfung der stetigen Funktionen $x \mapsto x \cdot \ln(a)$ und[71] $y \mapsto \exp(y)$ ist. Nach Satz 7.7 ist auch die Verknüpfung dieser beiden Funktionen, d.h. die Funktion $x \mapsto a^x = \exp(x \cdot \ln(a))$, stetig. ■





[71] Nach Satz 7.8 wissen wir, dass die Exponentialfunktion stetig ist.

10. Die komplexen Zahlen

10.1. Der Körper der komplexen Zahlen.

Definition. Wir bezeichnen mit
$$\mathbb{C} \;:=\; \{a + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{genannt imaginäre Einheit}}}{b\mathrm{i}} \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$$
die Menge aller formalen Summen $a + b\mathrm{i}$, wobei i ein festgewähltes Symbol ist, welches die *imaginäre Einheit* genannt wird. Wir nennen $\mathbb{C}$ die *Menge der komplexen Zahlen.* Für $a \in \mathbb{R}$ schreiben wir hierbei $a + 0\mathrm{i} = a$ und $0 + a\mathrm{i} = a\mathrm{i}$. Wir können komplexe Zahlen wie folgt addieren
$$(x + y\mathrm{i}) + (x' + y'\mathrm{i}) \;:=\; (x + x') + (y + y')\mathrm{i}, \qquad \text{wobei } x, y, x', y' \in \mathbb{R},$$
und wie folgt mit einer reellen Zahl λ multiplizieren
$$\lambda \cdot (x + y\mathrm{i}) \;:=\; \lambda x + \lambda y\mathrm{i}, \qquad \text{wobei } x, y, \lambda \in \mathbb{R}.$$
Man kann nun leicht überprüfen, dass $\mathbb{C}$ mit dieser Addition und dieser Skalarmultplikation ein 2-dimensionaler reeller Vektorraum ist.

Bemerkung. Es folgt eigentlich sofort aus den Definition, dass die Abbildung
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \mapsto & \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto & x + y\mathrm{i} \end{array}$$
ein Isomorphismus von reellen Vektorräumen ist. Wir stellen uns deswegen die komplexen Zahlen bildlich auch als die 2-dimensionale Ebene vor.

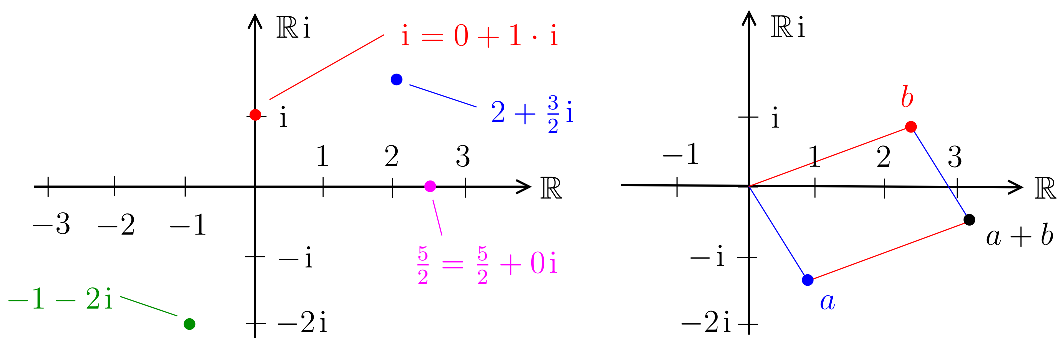


Abbildung 37. Graphische Darstellung von komplexen Zahlen und deren Addition.

Der folgende Satz besagt nun, dass man auf den komplexen Zahlen eine Multiplikation einführen kann, so dass alle Körperaxiome erfüllt sind.

Satz 10.1. *Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen mit*
$$\begin{array}{rcll} \textit{Addition}\ (x + y\mathrm{i}) + (x' + y'\mathrm{i}) & := & (x + x') + (y + y')\mathrm{i}, & \textit{wobei } x, y, x', y' \in \mathbb{R}, \\ \textit{Multiplikation}\ (x + y\mathrm{i}) \cdot (x' + y'\mathrm{i}) & := & (xx' - yy') + (xy' + x'y)\mathrm{i}, & \textit{wobei } x, y, x', y' \in \mathbb{R}, \end{array}$$
ist ein Körper.

Bemerkung.

(1) Salopp gesprochen ist die Multiplikation
$$(x+y\mathrm{i})\cdot(x'+y'\mathrm{i}) \;=\; (xx'-yy')+(xy'+x'y)\mathrm{i}$$
gegeben durch “naives” Ausmultiplizieren und indem wir $\mathrm{i}^2=-1$ setzen.

(2) Die Addition von komplexen Zahlen entspricht der üblichen Addition in $\mathbb{R}^2$. Die Multiplikation von komplexen Zahlen erscheint hingegen sehr unintuitiv. Im nächsten Kapitel werden wir eine geometrische Interpretation der Multiplikation nachliefern.

Beweis. Wir müssen also jetzt zeigen, dass alle Körperaxiome erfüllt sind.

(A1)-(A4) Elementares Nachrechnen zeigt, dass die Additionsaxiome (A1) bis (A4) mit dem additiv neutralen Element $0=0+0\mathrm{i}$ erfüllt sind.

(M1) Das Assoziativgesetz zeigt man durch explizites Nachrechnen.

(M2) Die Definition der Multiplikation ist symmetrisch in $x+y\mathrm{i}$ und $x'+y'\mathrm{i}$, also ist die Multiplikation kommutativ.

(M3) Für alle $x+y\mathrm{i}\in\mathbb{C}$ gilt
$$(x+y\mathrm{i})\cdot 1 \;=\; (x+y\mathrm{i})(1+0\mathrm{i}) \;=\; x+y\mathrm{i},$$
d.h. $1=1+0\mathrm{i}$ ist ein multiplikativ neutrales Element.

(M4) Es sei also $x+y\mathrm{i}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Dann ist
$$(x+y\mathrm{i})\cdot\frac{1}{x^2+y^2}(x-y\mathrm{i}) \;=\; \frac{1}{x^2+y^2}(x+y\mathrm{i})(x-y\mathrm{i}) \;=\; \frac{1}{x^2+y^2}(x^2+y^2) \;=\; 1.$$
Anders ausgedrückt, es ist
$$(x+y\mathrm{i})^{-1} \;=\; \frac{1}{x^2+y^2}\cdot(x-y\mathrm{i}) \;=\; \frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{i}.$$

(D) Das Distributivgesetz zeigt man ebenfalls durch explizites Nachrechnen. ■

Definition. Für eine reelle Zahl $a\geq 0$ schreiben wir manchmal
$$\sqrt{-a} \;:=\; \sqrt{a}\cdot\mathrm{i}.$$
Dann gilt in der Tat, dass
$$\sqrt{-a}^2 \;=\; (\sqrt{a}\cdot\mathrm{i})^2 \;=\; \sqrt{a}^2\cdot\mathrm{i}^2 \;=\; a\cdot(-1) \;=\; -a.$$

Folgendes Lemma beweist man leicht durch explizites Nachrechnen.

Lemma 10.2. (Mitternachtsformel) *Es sei $p(x)=ax^2+bx+c$ ein Polynom, wobei $a,b,c\in\mathbb{R}$ und $a\neq 0$. Die komplexen Zahlen*
$$z_\pm \;:=\; \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \;\in\; \mathbb{C}$$
haben die Eigenschaft, dass $p(z_\pm)=0$.

Es gibt auch Lösungsformeln für Polynome von Grad 3 und 4. In der Algebravorlesung wird jedoch bewiesen, dass es keine Lösungsformel für Polynome von Grad ≥ 5 geben kann. Desto überraschender ist dann vielleicht folgender Satz, welchen wir in Analysis III beweisen werden.

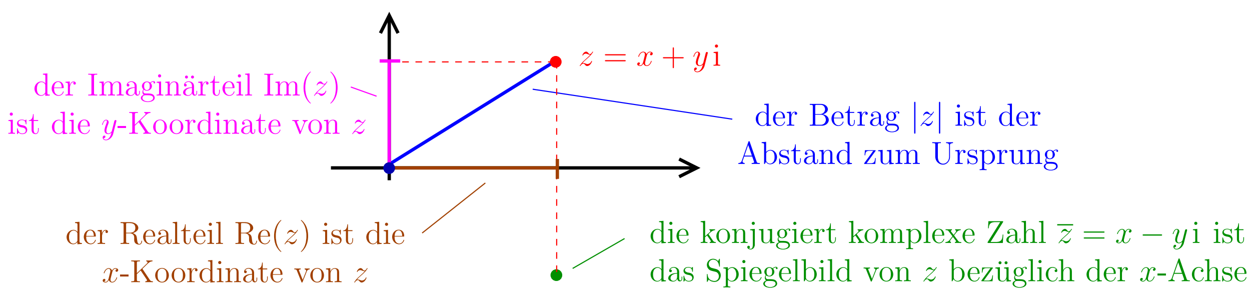
Satz 10.3. (**Fundamentalsatz der Algebra**) *Es sei* $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ *ein beliebiges Polynom mit komplexen Koeffizienten, wobei* $k \geq 1$ *und* $a_k \neq 0$. *Dann existiert ein* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $p(z) = 0$.

Bemerkung. Es sei $w \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann besagt der Fundamentalsatz der Algebra, dass das Polynom $x^2 - w$ eine komplexe Nullstelle besitzt. D.h. es gibt ein $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = w$. Anders ausgedrückt, jede komplexe Zahl besitzt eine Wurzel. In Übungsblatt 8 werden wir der Frage nachgehen, was die Wurzel(n) aus i sind.

Definition. Für $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ heißt

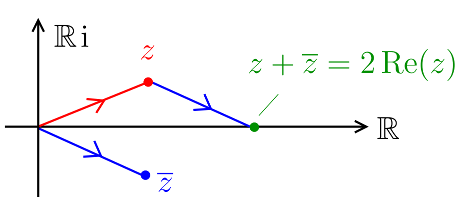
$$\begin{array}{rclcll} \mathrm{Re}(z) & := & \mathrm{Re}(x+y\mathrm{i}) & := & x & \text{der } \textit{Realteil von } z = x+y\mathrm{i}, \\ \mathrm{Im}(z) & := & \mathrm{Im}(x+y\mathrm{i}) & := & y & \text{der } \textit{Imaginärteil von } z = x+y\mathrm{i}, \\ \overline{z} & := & \overline{x+y\mathrm{i}} & := & x - y\mathrm{i} & \text{die } \textit{zu } z = x+y\mathrm{i} \textit{ konjugiert komplexe Zahl}. \end{array}$$

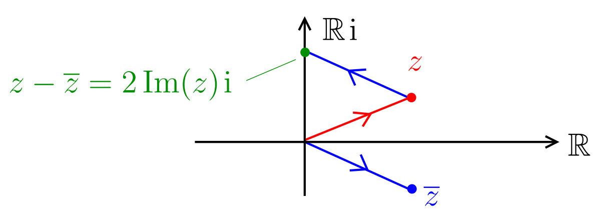
Die geometrische Bedeutung dieser Definitionen wird in Abbildung 10.1 skizziert.



Lemma 10.4. *Es seien* $w, z \in \mathbb{C}$. *Dann gilt:*

$$\begin{array}{clcl} (1) & \mathrm{Re}(z) & = & \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \\ (2) & \mathrm{Im}(z) & = & \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \end{array} \quad \textit{und} \quad \begin{array}{crcl} (a) & \overline{w+z} & = & \overline{w} + \overline{z} \\ (b) & \overline{w \cdot z} & = & \overline{w} \cdot \overline{z}. \end{array}$$





Beweis (∗). Alle diese Aussagen können durch elementares Nachrechnen bewiesen werden. Es seien also $w = u + v\mathrm{i}$ und $z = x + y\mathrm{i}$ komplexe Zahlen. Dann gilt in der Tat

$$\begin{array}{clclclclcl} (1) & \mathrm{Re}(z) & = & x & = & \frac{1}{2}(x + y\mathrm{i} + x - y\mathrm{i}) & = & \frac{1}{2}\big(x + y\mathrm{i} + \overline{x + y\mathrm{i}}\,\big) & = & \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \\ (2) & \mathrm{Im}(z) & = & y & = & \dfrac{1}{2i}(x + y\mathrm{i} - x + y\mathrm{i}) & = & \dfrac{1}{2i}\big(x + y\mathrm{i} - \overline{(x + y\mathrm{i})}\,\big) & = & \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \end{array}$$

und es gilt

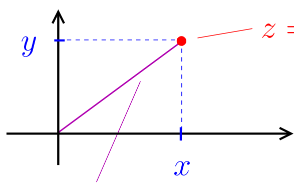
(a) $\overline{w+z} \;=\; \overline{u+x+(v+y)\mathrm{i}} \;=\; u+x-v\,\mathrm{i}-y\,\mathrm{i} \;=\; \overline{w}+\overline{z}$

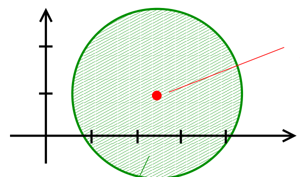
(b) $\overline{w\cdot z} \;=\; \overline{ux-vy+(uy+vx)\mathrm{i}} \;=\; ux-vy-(uy+vx)\mathrm{i} \;=\; (u-v\,\mathrm{i})(x-y\,\mathrm{i}) \;=\; \overline{w}\cdot\overline{z}.$

Wir haben damit alle Aussagen bewiesen. ■

Definition. Es sei $z = x + y\,\mathrm{i}$ eine komplexe Zahl. Wir bezeichnen $|z| := \sqrt{x^2+y^2}$ als den *Betrag von* z.

Beispiel. Der Betrag $|z| := \sqrt{x^2+y^2}$ einer komplexen Zahl $z = x + y\,\mathrm{i}$ ist also gerade der euklidische Abstand von $z = x + y\,\mathrm{i}$ zum Ursprung. Es folgt beispielsweise, dass für $r > 0$ die Menge $\{w \in \mathbb{C} \,|\, |w - z| \le r\}$ gerade die abgeschlossene Scheibe mit Mittelpunkt z und Radius r ist.



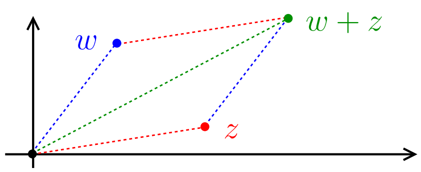


Lemma 10.5. *Es seien $w, z \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

(1)	$\lvert z\rvert$	$\ge$	0	*und es gilt:* $\lvert z\rvert = 0 \iff z = 0$,
(2)	$\lvert z\rvert$	$=$	$\sqrt{z\cdot\overline{z}}$,	*insbesondere ist* $\lvert z\rvert^2 = z\cdot\overline{z}$,
(3)	$\lvert\overline{z}\rvert$	$=$	$\lvert z\rvert$,	
(4)	$\lvert w\cdot z\rvert$	$=$	$\lvert w\rvert\cdot\lvert z\rvert$,	
(5)	$\lvert z\rvert$	$\ge$	$\lvert\mathrm{Re}(z)\rvert$	*und* $\lvert z\rvert \ge \lvert\mathrm{Im}(z)\rvert$,
(6)	$\lvert w+z\rvert$	$\le$	$\lvert w\rvert+\lvert z\rvert$	(*Dreiecksungleichung*).

Zudem gilt für $z \ne 0$ folgende Gleichheit:

(7) $z^{-1} \;=\; \frac{1}{|z|^2}\cdot\overline{z}$



die Dreiecksungleichung besagt, dass
$$|w+z| \;\le\; |w| + |z|$$

Beweis $(*)$. Alle diese Aussagen können zumeist durch elementares Nachrechnen bewiesen werden. Es seien also $w = u + v\,\mathrm{i}$ und $z = x + y\,\mathrm{i}$ komplexe Zahlen.

(1) Es ist $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \ge 0$. Wenn $z = 0$, dann ist natürlich $|z| = 0$. Umgekehrt, wenn $|z| = 0$, dann ist auch $x^2 + y^2 = 0$, d.h. $x = 0$ und $y = 0$.

(2) Es ist $\sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{(x+y\mathrm{i})(x-y\mathrm{i})} = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$.

(3) Es ist $|\overline{z}| = |x-y\mathrm{i}| = \sqrt{x^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |x+y\mathrm{i}| = |z|$.

(4) Es gilt:
$$|w \cdot z| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (2)}}}{=} \sqrt{wz \cdot \overline{wz}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 10.4 (b)}}}{=} \sqrt{w \cdot \overline{w} \cdot z \cdot \overline{z}} = \sqrt{w\overline{w}} \cdot \sqrt{z\overline{z}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (2)}}}{=} |w| \cdot |z|.$$

(5) Es ist $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| = |\operatorname{Re}(z)|$. Die zweite Ungleichung wird ganz analog bewiesen.

(6) Es ist
$$\begin{aligned} |w+z|^2 &\overset{\substack{\text{folgt aus (2)} \\ \downarrow}}{=} (w+z)\cdot(\overline{w}+\overline{z}) = w\overline{w} + w\overline{z} + z\overline{w} + z\overline{z} \overset{\substack{\text{Lemma 10.4 (1)} \\ \downarrow}}{=} |w|^2 + 2\operatorname{Re}(w\overline{z}) + |z|^2 \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (5)}}}{\leq} |w|^2 + 2|w\overline{z}| + |z|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (3) und (4)}}}{=} |w|^2 + 2|w|\cdot|z| + |z|^2 = (|w|+|z|)^2. \end{aligned}$$

(7) Es ist
$$z \cdot \frac{1}{|z|^2}\overline{z} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (2)}}}{=} \frac{1}{z\overline{z}} \cdot z\overline{z} = 1, \qquad \text{also ist } z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}.$$
■

Bemerkung. Wir haben in diesem Teilkapitel insbesondere gezeigt, dass $\mathbb{C}$ ein Körper ist. Es stellt sich die Frage, ob man eine Relation “$>$” auf $\mathbb{C}$ definieren kann, so dass $\mathbb{C}$ ein angeordneter Körper ist. Dies ist allerdings nicht möglich. In der Tat, denn in einem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ gilt nach Satz 1.14, dass $a^2 > 0$ für alle $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Dies impliziert, dass $1 = 1 \cdot 1 > 0$. Aus (O3) folgt dann, dass $0 > -1$. Aber in $\mathbb{C}$ gilt $\mathrm{i}^2 = -1$, welches nach Satz 1.14 positiv sein müsste, wenn $\mathbb{C}$ ein angeordneter Körper wäre.

10.2. **Folgen komplexer Zahlen.** Wir werden in diesem Kapitel sehen, dass wir ohne größere Probleme die meisten bisherigen Definitionen und Sätze von reellen Folgen und Reihen auf Folgen und Reihen von komplexen Zahlen übertragen können.

Wir beginnen mit der Definition der Konvergenz von einer Folge von komplexen Zahlen, welche im Prinzip die gleiche ist, wie die Definition, welche wir auf Seite 32 für Folgen reeller Zahlen gegeben hatten.

Definition. Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen. Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir [72]
$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n\geq N}{\forall} \ |z_n - z| < \epsilon.$$

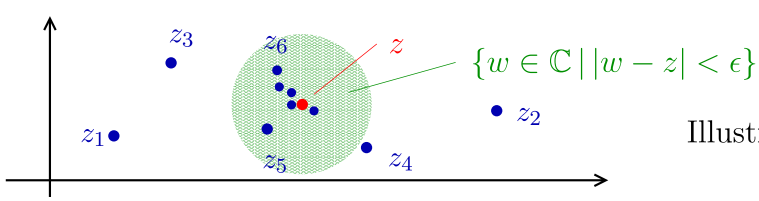


Illustration von $\lim_{n\to\infty} z_n = z$

[72] Hierbei ist ϵ eine positive reelle Zahl und $|z_n - z|$ bedeutet den Betrag der komplexen Zahl $z_n - z$

Für die Konvergenz von Folgen komplexer Zahlen gelten fast die gleichen Aussagen wie in Satz 3.1, Satz 3.3 und Satz 3.4, mit fast wort-wörtlich den gleichen Beweisen. Insbesondere gilt:

(1) Wenn eine Folge komplexer Zahlen konvergiert, dann ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.

(2) Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen, welche konvergiert, ist auch beschränkt, d.h. es gibt ein $C \in \mathbb{R}$, so dass $|z_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen komplexer Zahlen. Dann gilt zudem

(3) $$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

(4) $$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n,$$

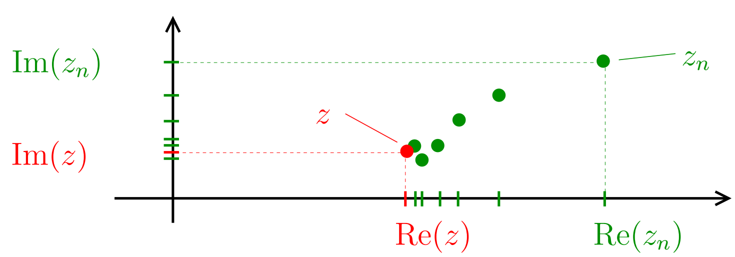
(5) für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $$\lim_{n\to\infty} \lambda \cdot a_n = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} a_n,$$

(6) wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $b_n \neq 0$, und wenn $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, dann gilt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

(7) Als neue Regel erhalten wir noch die Gleichheit
$$\lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = \overline{\lim_{n\to\infty} a_n},$$
welche man problemlos elementar beweisen kann.

Der folgende Satz besagt nun, dass man die Konvergenz von Folgen komplexer Zahlen auf die Konvergenz der Real- und Imaginärteile zurückführen kann.

Satz 10.6. *Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen und es sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt*[73]
$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z) \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z).$$



Beweis (∗). Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir jetzt $z_n = x_n + y_n\,\mathrm{i}$, wobei $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Wir schreiben zudem $z = x + y\,\mathrm{i}$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

Wir zeigen zuerst die "$\Leftarrow$"-Richtung. Wir nehmen nun also an, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Dann gilt:

[73] Die linke Seite betrifft die Konvergenz einer Folge von komplexen Zahlen, während die rechte Seite von der Konvergenz zweier Folgen reeller Zahlen handelt.

$$\lim_{n\to\infty} z_n \;=\; \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n\,\mathrm{i}) \;\underset{}{\overset{\substack{\text{obige Aussage (3)}\\ \downarrow}}{=}}\; \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty}(y_n\,\mathrm{i}) \;\overset{\substack{\text{obige Aussage (5) mit } \lambda = \mathrm{i}\\ \downarrow}}{=}\; \lim_{n\to\infty} x_n + \Big(\lim_{n\to\infty} y_n\Big)\,\mathrm{i} \;=\; x + y\,\mathrm{i}.$$

Wir zeigen nun die "⇒"-Richtung. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Lemma 10.4 (1)}}}{=}\; \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}(z_n + \overline{z}_n) \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{obige Aussage (3) und (7)}}}{=}\; \tfrac{1}{2}\Big(\lim_{n\to\infty} z_n + \overline{\lim_{n\to\infty} z_n}\Big) \;=\; \tfrac{1}{2}(z + \overline{z}) \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Lemma 10.4 (1)}}}{=}\; \mathrm{Re}(z).$$

Genauso zeigt man auch, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = z$. ■

Die Definition einer Cauchy-Folge komplexer Zahlen ist fast wort-wörtlich die Gleiche wie die Definition einer Cauchy-Folgen reeller Zahlen, welche wir auf Seite 51 gegeben hatten.

Definition. Es sei Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen.

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine } \textit{Cauchy-Folge} :\iff \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n,m\geq N}{\forall}\ |z_n - z_m| < \epsilon.$$

Satz 10.7. *Jede Cauchy-Folge von komplexen Zahlen konvergiert in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von komplexen Zahlen. Wir müssen zeigen, dass die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wir setzen $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ und $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$. Es folgt aus Satz 10.6, dass es genügt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Die reellen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

Wir beweisen zuerst, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Nachdem $\mathbb{R}$ vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Wir machen dazu folgende Beobachtung: für beliebige $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|x_n - x_m| \;=\; |\,\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(z_m)| \;=\; |\,\mathrm{Re}(z_n - z_m)| \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Lemma 10.5 (5) besagt, dass } |\,\mathrm{Re}(w)| \leq |w|}}{\leq}\; |z_n - z_m|.$$

Aus dieser Beobachtung und der Voraussetzung, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, folgt sofort, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Tat eine Cauchy-Folge, und damit eine konvergente Folge, ist. Ganz genau zeigt man auch die Konvergenz der Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

10.3. **Reihen von komplexen Zahlen.** Der Begriff einer Reihe von reellen Zahlen, den wir auf Seite 47 eingeführt hatten, überträgt sich auf offensichtliche Weise ins Komplexe.

Definition. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von komplexen Zahlen. Wir definieren

$$\text{die Reihe } \sum_{n\geq 0} a_n \;:=\; \text{die Folge der Partialsummen der Folge } (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$
$$= \text{die Folge } (a_0,\ a_0{+}a_1,\ a_0{+}a_1{+}a_2,\ \dots) \;=\; \text{die Folge } \begin{array}{l} a_0 \\ a_0+a_1 \\ a_0+a_1+a_2 \\ \vdots \end{array}$$

Wenn die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ konvergiert, d.h. wenn die Folge der Partialsummen konvergiert, dann schreiben wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad := \quad \text{Grenzwert der Reihe } \sum_{n\geq 0} a_n \quad := \quad \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n.$$

Für konvergente Reihen gelten dann die üblichen Rechenregeln wie in Satz 3.17.

Beispiel. Der Satz 3.16 über die Konvergenz der geometrischen Reihe verallgemeinert sich problemlos zu folgender Aussage:

$$\text{für jedes } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1 \text{ gilt} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^n \;=\; \frac{1}{1-z}.$$

Definition. Eine Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$ von komplexen Zahlen heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} |z_n|$ der Beträge konvergiert.

Bemerkung. Unter Verwendung von Satz 10.7 können wir viele Aussagen über die Konvergenz von reellen Reihen auch auf die Konvergenz von komplexen Reihen übertragen. Insbesondere erhalten wir, mit fast wort-wörtlich den gleichen Formulierungen und Beweisen, folgende Aussagen:

(1) Jede absolut konvergente Reihe konvergiert, siehe Satz 6.10.

(2) Das Majorantenkriterium, siehe Satz 6.8.Dieses lautet nun wie folgt. Es sei $(a_n)_{n\geq w}$ eine komplexe Folge und es sei $(b_n)_{n\geq w}$ eine reelle Folgen. Dann gilt

$$b_n \geq |a_n| \text{ für alle } n \quad \text{und} \quad \sum_{n\geq w} b_n \text{ konvergiert} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq w} a_n \text{ konvergiert.}$$

(3) Das Quotientenkriterium, siehe Satz 6.11. Dieses lautet nun wie folgt: Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von *komplexen* Zahlen mit $a_n \neq 0$, so dass der Grenzwert

$$\Theta \;:=\; \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

existiert. Wenn $\Theta < 1$, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ absolut, insbesondere konvergiert dann nach der Verallgemeinerung von Satz 6.10 auch die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$. Wenn hingegen $\Theta > 1$, dann divergiert die Reihe.

Satz 10.8.

(1) *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Exponentialreihe* $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ *absolut.*

(2) *Die Exponentialfunktion*

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{k\to\infty} \Big(1+z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^k}{k!}\Big) \end{aligned}$$

besitzt die folgenden Eigenschaften:

(a) *Für alle $z, z' \in \mathbb{C}$ gilt* $\exp(z+z') = \exp(z)\cdot\exp(z')$ (*Funktionalgleichung*).

(b) *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt* $\exp\big(\overline{z}\big) = \overline{\exp(z)}$.

Beweis.

(1) In Satz 6.17 hatten wir gesehen, dass die Exponentialreihe für jedes $z \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert. Der Beweis, dass die Exponentialreihe auch für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert ist eigentlich genau der gleiche, wir müssen nur die oben kurz angeschnittene Verallgemeinerung des Quotientenkriteriums auf komplexe Reihen verwenden. Der Vollständigkeit halber führen wir das Argument aus. Es sei also $z \in \mathbb{C}$ beliebig. Wir schreiben $a_n := \frac{z^n}{n!}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}\cdot n!}{z^n\cdot(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{n+1} = |z|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Es folgt aus dieser Berechnung und dem Quotienten-Kriterium, dass die Exponentialreihe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n = \sum\limits_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$ absolut konvergiert.

(2) (a) In Theorem 6.18 hatten wir die Aussage für den Fall bewiesen, dass $z, z' \in \mathbb{R}$. Der Beweis überträgt sich jedoch wort-wörtlich zu dem Fall, dass z, z' beliebige komplexe Zahlen sind.

(b) Diese Aussage folgt aus der allgemeinen Beobachtung, dass für jede konvergente Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$ folgende Gleichheit gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\overline{w_n} = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\overline{w_n} \underset{\uparrow}{=} \overline{\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k} w_n} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} w_n},$$

auf Seite 129 hatten wir gesehen, dass sich Grenzwert und komplexe Konjugation vertauschen lassen

und der Beobachtung, dass für $z \in C$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\overline{\frac{z^n}{n!}} = \frac{\overline{z}^n}{n!}$.

■

Bemerkung. Wir haben jetzt also gesehen, dass viele Definitionen und Aussagen über reelle Folgen und Reihen problemlos auf Folgen und Reihen von komplexen Zahlen übertragen werden können. Insbesondere alle Aussagen, welche nur mit dem Absolutbetrag “| |” von reellen Zahlen formuliert wurden, gelten ganz analog in der Welt der komplexen Zahlen. Allerdings können die Definitionen und Aussagen über reelle Zahlen, Folgen und Reihen, welche die Anordnung “>” verwenden, *nicht* auf die komplexen Zahlen übertragen werden. Insbesondere gilt:

(1) Es gibt *kein* Analogon zum Leibniz-Kriterium, welches auf Folgen komplexer Zahlen zutrifft.
(2) Es gibt keinen Begriff von Supremum oder Infimum einer Teilmenge von $\mathbb{C}$.
(3) Es macht keinen Sinn zu sagen, dass eine Folge von komplexen Zahlen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $-\infty$ oder $+\infty$ divergiert.

11. Trigonometrische Funktionen

11.1. **Definition von Sinus und Kosinus.** Das folgende Lemma macht die etwas überraschende Aussage, dass für jede reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ die komplexe Zahl $\exp(t\mathrm{i})$ auf dem Kreis mit Radius 1 um den Ursprung liegt.

Lemma 11.1. *Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $|\exp(t\mathrm{i})| = 1$.*

Beweis. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} |\exp(t\mathrm{i})|^2 &\overset{\substack{\text{Lemma 10.5}\\ \downarrow}}{=} \exp(t\mathrm{i}) \cdot \overline{\exp(t\mathrm{i})} \overset{\substack{\text{Satz 10.8 (2b)}\\ \downarrow}}{=} \exp(t\mathrm{i}) \cdot \exp(\overline{t\mathrm{i}}) \overset{\substack{\text{da } t \in \mathbb{R}\\ \downarrow}}{=} \exp(t\mathrm{i}) \cdot \exp(-t\mathrm{i}) \\ &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Funktionalgleichung, d.h. Satz 10.8 (2a)}}}{=} \exp(t\mathrm{i} - t\mathrm{i}) = \exp(0) = 1. \end{aligned}$$

Nachdem Beträge immer ≥ 0 sind folgt nun auch, dass $\exp(t\mathrm{i})| = 1$. ■

Analog zur Definition auf Seite 122 führen wir nun folgende Notation ein.

Notation. Für $z \in \mathbb{C}$ schreiben wir nun $e^z := \exp(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

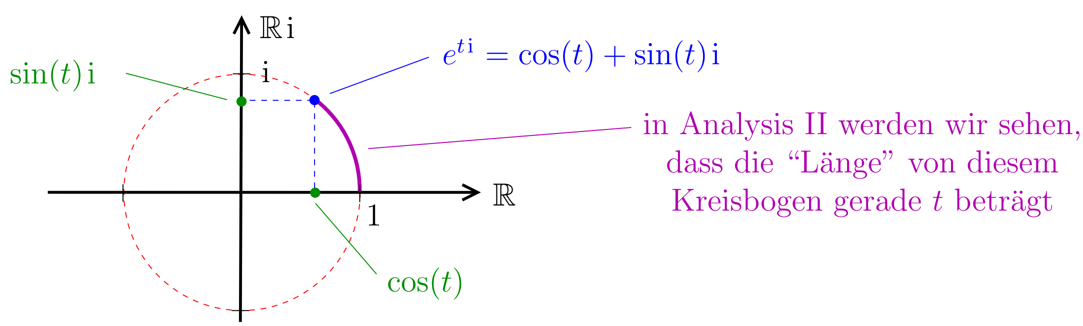
Beispiel. Mit dieser Notation gilt:
(1) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt: $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ (Funktionalgleichung).
(2) Lemma 11.1 besagt, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $|e^{t\mathrm{i}}| = 1$.

Definition. Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \sin(t) &:= \operatorname{Im}(e^{t\mathrm{i}}), && \text{genannt } \textit{Sinus von } t \\ \cos(t) &:= \operatorname{Re}(e^{t\mathrm{i}}), && \text{genannt } \textit{Kosinus von } t. \end{aligned}$$

Bemerkung. Per Definition gilt also für jedes $t \in \mathbb{R}$ folgende Gleichheit:

$$e^{t\mathrm{i}} = \cos(t) + \sin(t)\,\mathrm{i} \qquad \text{(Eulersche Formel)}$$



Bemerkung. Lemma 11.1 besagt, dass die komplexe Zahl $e^{t\mathrm{i}}$ auf dem Einheitskreis um die Null in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ liegt. Der Sinus von t ist nun die "y-Koordinate" von $e^{t\mathrm{i}}$ und der Kosinus von t ist die "x-Koordinate" von $e^{t\mathrm{i}}$. Die anschauliche Bedeutung von $e^{t\mathrm{i}}$ ist hierbei, dass, zumindest für "kleine" t, der Kreisbogen zwischen $1 \in \mathbb{C}$ und $e^{t\mathrm{i}}$ gerade die "Länge" t

besitzt. Damit diese Aussage Sinn ergibt, müssen wir allerdings erst noch sauber definieren, was “Länge” eigentlich heißen soll. Wir werden den Begriff “Länge” erst in Analysis II einführen, wenn wir Analysis in einem beliebigen $\mathbb{R}^n$ behandeln.

Die folgenden Lemmata und Sätze beinhalten einige grundlegende Aussagen über Sinus und Kosinus.

Lemma 11.2. *Für $t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{array}{lrcr} (1) & \sin(-t) & = & -\sin(t) \\ (2) & \cos(-t) & = & \cos(t). \end{array}$$

Beweis. Es sei also $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{array}{l} (1)\quad \sin(-t) \underset{\text{per Definition}}{=} \operatorname{Im}\left(e^{-t\,\mathrm{i}}\right) \underset{\text{aus } t\in\mathbb{R} \text{ folgt } -t\,\mathrm{i}=\overline{t\,\mathrm{i}}}{=} \operatorname{Im}\left(e^{\overline{t\,\mathrm{i}}}\right) \underset{\text{Satz 10.8 (2b)}}{=} \operatorname{Im}\left(\overline{e^{t\,\mathrm{i}}}\right) \underset{\text{Definition des komplex Konjugierten}}{=} -\operatorname{Im}\left(e^{t\,\mathrm{i}}\right) = -\sin(t) \\ (2)\quad \cos(-t) = \operatorname{Re}\left(e^{-t\,\mathrm{i}}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{\overline{t\,\mathrm{i}}}\right) = \operatorname{Re}\left(\overline{e^{t\,\mathrm{i}}}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{t\,\mathrm{i}}\right) = \cos(t). \end{array}$$

■

Lemma 11.3. *Für $t \in \mathbb{R}$ gilt* $\sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1.$

Beweis. Es gilt: $\sin(t)^2 + \cos(t)^2 = \operatorname{Im}(e^{t\,\mathrm{i}})^2 + \operatorname{Re}(e^{t\,\mathrm{i}})^2 \underset{\text{Definition des Betrags der komplexen Zahl } e^{t\,\mathrm{i}}}{=} |e^{t\,\mathrm{i}}|^2 \underset{\text{Lemma 11.1}}{=} 1.$ ■

Ein Vorteil der Definition von Kosinus und Sinus mithilfe der komplexen Exponentialfunktion ist, dass sich nun die Additionstheoreme sehr leicht beweisen lassen.

Satz 11.4. (Additionstheoreme) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cdot\cos(y) + \cos(x)\cdot\sin(y), \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y). \end{aligned}$$

Beweis.

> Der geniale Trick ist, dass man Sinus und Kosinus nicht getrennt betrachtet, sondern zur komplexen Exponentialfunktion zusammenfasst. Die Additionstheoreme folgen dann leicht aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion. Bei den Additionstheoremen ist es am einfachsten, wenn man sich diese Beweisidee merkt. Aus der Beweisidee kann man sich dann problemlos die Additionstheoreme herleiten. Das ist viel einfacher, als zu versuchen, sich die Additionstheoreme auswendig zu merken.

Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + \sin(x+y)\,\mathrm{i} &= e^{(x+y)\,\mathrm{i}} = e^{x\,\mathrm{i}+y\,\mathrm{i}} \overset{\text{dies folgt aus der Funktionalgleichung } e^{w+z}=e^w\cdot e^z}{=} e^{x\,\mathrm{i}}\cdot e^{y\,\mathrm{i}} \\ &= (\cos(x)+\sin(x)\,\mathrm{i})\cdot(\cos(y)+\sin(y)\,\mathrm{i}) \\ &\underset{\text{folgt durch Ausmultiplizieren}}{=} \cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y) + (\sin(x)\cdot\cos(y) + \cos(x)\cdot\sin(y))\,\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Der Satz folgt nun aus dem Vergleich der Realteile und der Imaginärteile. ■

Sinus und Kosinus sind untrennbare Freunde

Satz 11.5. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\ \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right) \end{aligned}$$

Beide Reihen konvergieren zudem jeweils absolut.

Bemerkung. Satz 11.5 besagt insbesondere, dass wir $\sin(x)$ und $\cos(x)$ als Reihen beschreiben können. Dies ist wichtig, weil man dadurch in der Praxis $\sin(x)$ und $\cos(x)$ annäherungsweise ausrechnen kann.

Beweis. Es sei $x \in \mathbb{R}$. Ganz analog zum Beweis der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe kann man auch hier problemlos mithilfe des Quotienten-Kriteriums 6.11 zeigen, dass die beiden angegebenen Reihen absolut konvergieren. Zudem gilt:

wir wollen den Ausdruck wieder in Real- und Imaginärteil aufteilen, nachdem $\mathrm{i}^n \in \{-1, 1\}$ wenn n gerade, und nachdem $\mathrm{i}^n \in \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$ wenn n ungerade, teilen wir die Reihe auf in n gerade und n ungerade

$$\cos(x) + \sin(x)\,\mathrm{i} = e^{x\mathrm{i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\,\mathrm{i})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}^n \cdot \frac{x^n}{n!} \overset{\downarrow}{\underset{\uparrow}{=}} \sum_{n \text{ gerade}} \mathrm{i}^n \cdot \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \text{ ungerade}} \mathrm{i}^n \cdot \frac{x^n}{n!}$$

wir können die Reihe zerlegen, weil die Reihen rechts, wie gerade gesehen, konvergieren

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2k} \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2k} \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \mathrm{i}.$$

denn $\mathrm{i}^{2k} = (\mathrm{i}^2)^k = (-1)^k$

Die Aussage des Satzes folgt nun, indem man den Realteil und den Imaginärteil zu Beginn und am Ende vergleicht. ■

Satz 11.6. (Stetigkeit der Sinus- und der Kosinusfunktion) *Die Funktionen*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sin(t) \end{array} \quad \textit{und} \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \cos(t) \end{array} \qquad \textit{sind stetig.}$$

Beweis $(*)$. Wir zeigen im Folgenden, dass die Sinusfunktion stetig ist. Der Beweis, dass die Kosinusfunktion stetig ist, verläuft ganz analog. Das Stetigkeitskriterium aus Satz 7.4 besagt, dass es genügt, folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung. Für jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(a_n) = \sin\big(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\big)$.

Wir setzen $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Es ist

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sin(a_n) &= \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(e^{a_n \mathrm{i}}) \underset{\text{Satz 10.6}}{=} \operatorname{Im}\Big(\lim_{n\to\infty} e^{a_n \mathrm{i}}\Big) \underset{\text{Funktionalgleichung}}{=} \operatorname{Im}\Big(\lim_{n\to\infty} e^{a\,\mathrm{i}} \cdot e^{(a_n-a)\,\mathrm{i}}\Big) \\
&= \operatorname{Im}\Big(e^{a\,\mathrm{i}} \cdot \lim_{n\to\infty} e^{(a_n-a)\,\mathrm{i}}\Big) = \operatorname{Im}(e^{a\,\mathrm{i}} \cdot 1) = \sin(a).
\end{aligned}
$$

das gleiche Argument wie im Beweis von Satz 7.8 zeigt, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{2}$ gilt, dass $|e^z - 1| \le 2 \cdot |z|$ aus $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$ folgt nun, dass $\lim\limits_{n\to\infty} e^{(a_n-a)\,\mathrm{i}} = 1$ ■

11.2. **Definition von π.** Wir wollen in diesem Teilkapitel "π" einführen. Die Zahl π wird in der Schule als der halbe Umfang eines Kreises von Radius 1 eingeführt. Das Problem, welches sich nun stellt ist, wie ist denn die "Länge" eines Kreises definiert? Wir werden diese Frage erst in Analysis II beantworten. Wir führen im Folgenden π auf eine andere Weise ein. Wir werden später in Analysis II sehen, dass die Definition von π, welche wir im Folgenden geben werden, tatsächlich der Definition über den Umfang eines Kreises entspricht.

Wir wollen nun also eine vernünftige Definition von π geben, mit den Hilfsmitteln, welche uns zur Verfügung stehen. Die Idee ist, dass wir π über die Nullstelle(n) der Kosinusfunktion einführen. Dazu müssen wir uns aber erst einmal davon überzeugen, dass die Kosinusfunktion, so wie wir sie definiert hatten, überhaupt eine Nullstelle besitzt.

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\cos(x) &\underset{\text{nach Satz 11.5 gilt}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \underbrace{1}_{k=0} \underbrace{- \frac{x^2}{2}}_{k=1} \underbrace{+ \frac{x^4}{24}}_{k=2} \underbrace{+ \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{\text{Summand}} \\
\sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.
\end{aligned}
$$

Das folgende Lemma besagt nun, dass sich für $x \in [0,2]$ die Werte von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ an den Partialsummen orientieren. Insbesondere erhalten wir durch dieses Lemma eine gewisse Kontrolle über $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für $x \in [0,2]$.

Satz 11.7. *Für $x \in [0,2]$ gilt*

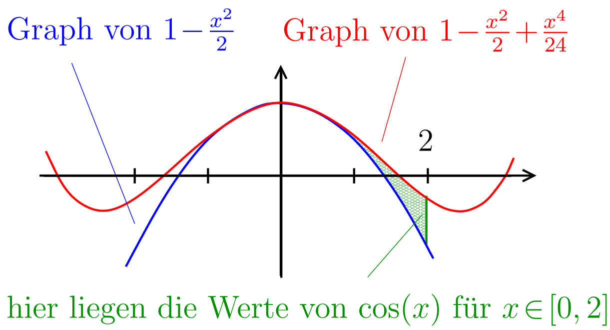
(1) $1 - \frac{x^2}{2} \le \cos(x) \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ *und* (2) $x - \frac{x^3}{6} \le \sin(x) \le x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

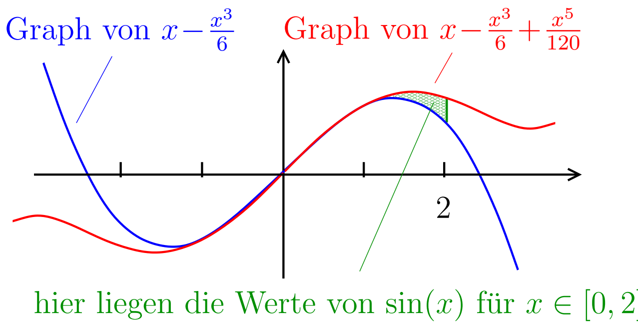
Bemerkung. Es folgt leicht aus Satz 11.7, dass $\cos(0) = 1$, dass $\cos(2) < 0$ und für alle $x \in (0,2]$ gilt: $\sin(x) > 0$.

Beweis $(*)$. Für den Beweis des Satzes benötigen wir folgende Behauptung:

Behauptung. Es sei $(a_k)_{k\ge 2m}$ eine monoton fallende Folge von nicht-negativen reellen Zahlen. Dann gilt

$$\sum_{k=2m}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k \in [0, a_{2m}] \qquad \text{falls der Grenzwert existiert.}$$





Es gilt in der Tat:

$$\sum_{k=2m}^{\infty}(-1)^k\cdot a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2m}^{n}(-1)^k\cdot a_k = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(a_{2m}-a_{2m+1}+a_{2m+2}-\ldots+(-1)^n\cdot a_n\right)}_{\substack{\text{im Beweis des Leibniz-Kriteriums 6.7}\\ \text{auf Seite 78 hatten wir gesehen, dass}\\ \text{diese alternierende Summe in } [0,a_{2m}] \text{ liegt}}} \overset{\substack{\text{da alle Folgenglieder in } [0,a_{2m}] \text{ liegen, folgt aus Satz 3.6}\\ \text{dass auch der Grenzwert in } [0,a_{2m}] \text{ liegt}\\ \downarrow}}{\in} [0,a_{2m}]$$

⊞

Wir wenden uns jetzt dem eigentlichen Beweis zu.

(1) (a) Wie gerade besprochen gilt $\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

(b) Wir müssen also zeigen, dass für alle $x\in[0,2]$ gilt $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k}}{(2k)!} \in \left[0,\frac{x^4}{24}\right]$.

(c) Nach der Behauptung genügt es zu zeigen, dass die Folge $a_k := \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ für $k\geq 2$ monoton fallend ist.

(d) Für $k\geq 2$ gilt:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cdot\frac{(2k)!}{x^{2k}} = \frac{x^2}{(2k+2)\cdot(2k+1)} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } x\in[0,2]}}{\leq} \frac{4}{(2k+2)\cdot(2k+1)} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } k\geq 2}}{<} 1.$$

Also ist die Folge $a_k := \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ für $k\geq 2$ monoton fallend.

(2) Der Beweis der Ungleichungen für $\sin(x)$ verläuft ganz analog zum Beweis von (1). ■

Satz 11.8. *Die Einschränkung der Kosinusfunktion auf das Intervall* $[0,2]$ *ist streng monoton fallend.*

Für den Beweis von Satz 11.8 müssen wir die Werte der Kosinusfunktion an verschiedenen Punkten vergleichen. Folgendes Lemma ermöglicht dieses Unterfangen.

Lemma 11.9. *Für* $x,y\in\mathbb{R}$ *gilt:*

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad \cos(x)-\cos(y) &&= -2\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\\
&(2) \qquad \sin(x)-\sin(y) &&= 2\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).
\end{aligned}$$

Beweis von Lemma 11.9. Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Wir setzen $u := \frac{x+y}{2}$ und $v := \frac{x-y}{2}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\cos(x) - \cos(y) &\overset{\text{denn } u+v=x \text{ und } u-v=y}{=} \cos(u+v) - \cos(u-v) \overset{\text{Satz 11.4}}{=} \\
&= (\cos(u)\cdot\cos(v) - \sin(u)\cdot\sin(v)) \;-\; (\cos(u)\cdot\cos(-v) - \sin(u)\cdot\sin(-v)) \\
&\underset{\substack{\text{aus Lemma 11.2 folgt, dass } \cos(-v)=\cos(v) \text{ und } \sin(-v)=-\sin(v),\\ \text{also heben sich zwei Terme weg, und zwei Terme sind gleich}}}{=} -2\cdot\sin(u)\cdot\sin(v) \;=\; -2\cdot\sin\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\tfrac{x-y}{2}\right).
\end{aligned}$$

Diese Aussage über $\sin(x) - \sin(y)$ wird ganz ähnlich bewiesen. ■

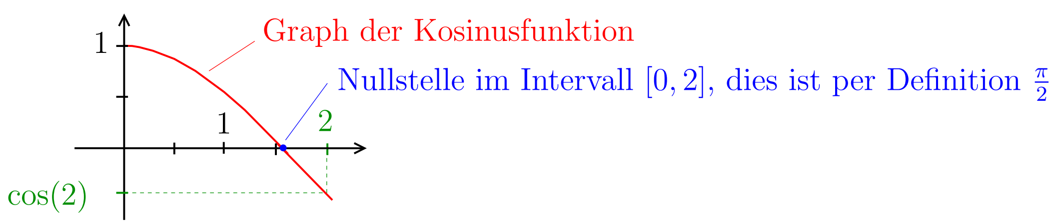
Beweis von Satz 11.8. Wir wollen also zeigen, dass die Einschränkung der Kosinusfunktion auf das Intervall $[0,2]$ streng monoton fallend ist. Es seien also $x_2 > x_1$ zwei reelle Zahlen in $[0,2]$. Wir müssen zeigen, dass $\cos(x_2) < \cos(x_1)$. Mit anderen Worten, wir müssen zeigen, dass $\cos(x_2) - \cos(x_1) < 0$. In der Tat gilt:

$$\cos(x_2) - \cos(x_1) \overset{\text{nach Lemma 11.9 (1)}}{=} -2\cdot\sin\Bigg(\underbrace{\frac{x_2 + x_1}{2}}_{\substack{\in(0,2],\text{ da } x_1,x_2\in[0,2]\\ \text{und da } x_2 > x_1}}\Bigg)\cdot\sin\Bigg(\underbrace{\frac{x_2 - x_1}{2}}_{\substack{\in(0,2],\text{ da } x_1,x_2\in[0,2]\\ \text{und da } x_2 > x_1}}\Bigg) \overset{\text{nach Satz 11.7 (2) sind die diese Sinuswerte positiv}}{<} 0.$$

■

Definition. Nachdem $\cos(0) > 0$ und $\cos(2) < 0$ gibt es nach dem Zwischenwertsatz 8.3 ein $x \in (0,2)$, so dass $\cos(x) = 0$. Satz 11.8 besagt, dass der Kosinus auf dem Intervall $[0,2]$ streng monoton fallend ist. Es gibt also *genau* eine Nullstelle im Intervall $[0,2]$. Wir definieren jetzt

$$\pi := 2 \cdot \text{die Nullstelle der Kosinusfunktion auf dem Intervall } [0,2].$$



Bemerkung. Es ist

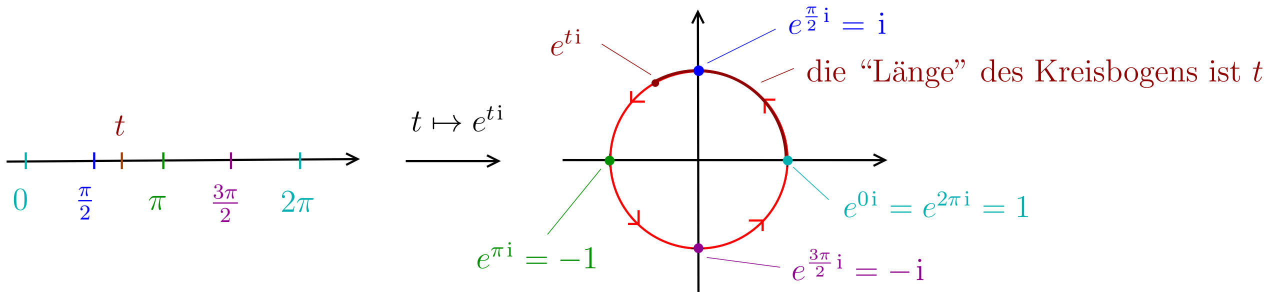
$$\sin(\tfrac{\pi}{2})^2 \underset{\text{Lemma 11.3}}{=} 1 - \cos(\tfrac{\pi}{2})^2 \underset{\text{per Definition von } \pi}{=} 1 - 0 = 1 \underset{\text{denn } \sin(x)\geq 0 \text{ für } x\in[0,2]}{\Longrightarrow} \sin(\tfrac{\pi}{2}) = 1.$$

Wir erhalten insbesondere

(a) $$e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = \cos(\tfrac{\pi}{2}) + \sin(\tfrac{\pi}{2})\,\mathrm{i} = \mathrm{i}.$$

Daraus können wir auch herleiten, dass

$$\begin{array}{lrcccccc}
\text{(b)} & e^{\pi\,\mathrm{i}} & = & (e^{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{i}})^2 & = & \mathrm{i}^2 & = & -1, \\
\text{(c)} & e^{\frac{3\pi}{2}\,\mathrm{i}} & = & (e^{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{i}})^3 & = & (-1)\cdot \mathrm{i} & = & -\mathrm{i}, \\
\text{(d)} & e^{2\pi\,\mathrm{i}} & = & (e^{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{i}})^4 & = & (-i)\cdot \mathrm{i} & = & 1.
\end{array}$$



Bemerkung. Die Gleichung $e^{\pi\,\mathrm{i}} = -1$ kann auch geschrieben werden als $e^{\pi\,\mathrm{i}} + 1 = 0$. Diese Gleichung wird manchmal als die schönste Gleichung der Mathematik bezeichnet, nachdem diese die fundamentalen komplexen Zahlen $e, \pi, \mathrm{i}, 1$ und 0 in Verbindung setzt.

imaginäre Einheit i

Kreiszahl π

Eulersche Zahl e

$$\boxed{e^{\pi\,\mathrm{i}} + 1 = 0}$$

additiv neutrales Element 0

multiplikativ neutrales Element 1

Bemerkung. In Satz 9.7 hatten wir gesagt, dass die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend ist. Insbesondere ist die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv und wir konnten dadurch den Logarithmus als die Umkehrfunktion $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definieren. Nachdem $\exp(2\pi\,\mathrm{i}) = 1 = \exp(0)$ sehen wir nun, dass die komplexe Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *nicht* injektiv ist. Insbesondere gibt es keine (offensichtliche) Definition eines komplexen Logarithmus.

Das folgende Lemma zeigt, dass die Sinus- und die Kosinusfunktion 2π periodisch sind.

Lemma 11.10. *Für $t \in \mathbb{R}$ gilt:*

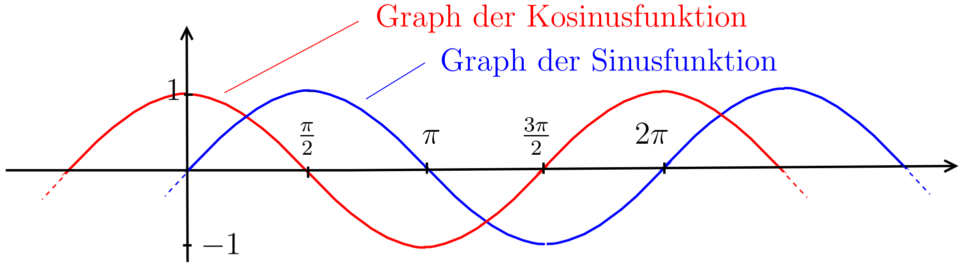
$$\begin{array}{rclcrcl}
\cos(t+\frac{\pi}{2}) & = & -\sin(t) & \textit{und} & \sin(t+\frac{\pi}{2}) & = & \cos(t) \\
\cos(t+\pi) & = & -\cos(t), & \textit{und} & \sin(t+\pi) & = & -\sin(t) \\
\cos(t+2\pi) & = & \cos(t) & \textit{und} & \sin(t+2\pi) & = & \sin(t)
\end{array}$$

Beweis $(*)$. Es sei $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcccccccl}
\cos(t+\frac{\pi}{2}) + \sin(t+\frac{\pi}{2})\,\mathrm{i} & = & e^{i(t+\frac{\pi}{2})} & = & e^{t\,\mathrm{i}}\cdot e^{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{i}} & = & e^{t\,\mathrm{i}}\cdot \mathrm{i} & = & -\sin(t) + \cos(t)\,\mathrm{i}, \\
\cos(t+\pi) + \sin(t+\pi)\,\mathrm{i} & = & e^{i(t+\pi)} & = & e^{t\,\mathrm{i}}\cdot e^{\pi\,\mathrm{i}} & = & e^{t\,\mathrm{i}}\cdot(-1) & = & -\cos(t) - \sin(t)\,\mathrm{i}, \\
\cos(t+2\pi) + \sin(t+2\pi)\,\mathrm{i} & = & e^{i(t+2\pi)} & = & e^{t\,\mathrm{i}}\cdot e^{2\pi\,\mathrm{i}} & = & e^{t\,\mathrm{i}}\cdot 1 & = & \cos(t) + \sin(t)\,\mathrm{i}.
\end{array}$$

Die Aussagen folgen, wie so oft, durch Vergleich der Real- und Imaginärteile. ■

Bemerkung. Die Symmetrieeigenschaften aus Lemma 11.2 und Lemma 11.10 zusammen mit dem Graphen in Abbildung 11.2 geben uns nun in etwa die Graphen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion auf ganz $\mathbb{R}$, welche in Abbildung skizziert sind.

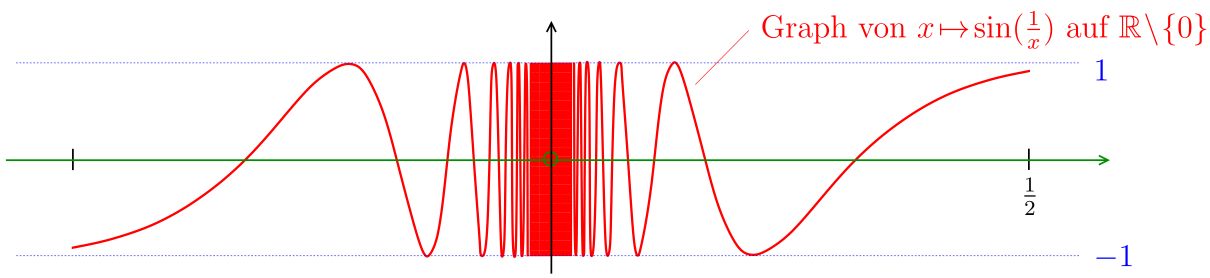


Wir beschließen das Teilkapitel mit einer meiner Lieblingsfunktionen.

Beispiel. In der folgenden Abbildung zeigen wir den Graphen der Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, welche gegeben ist durch $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$f\left(\frac{1}{2k\cdot\pi+\frac{\pi}{2}}\right) = 1 \quad\text{und}\quad f\left(\frac{1}{2k\cdot\pi+\frac{3\pi}{2}}\right) = -1 \quad\text{und falls zudem } k\neq 0 \text{ gilt:}\quad f\left(\frac{1}{k\cdot\pi}\right) = 0.$$

Wir sehen also, dass diese Funktion im Intervall $[-1,1]$ unendliche viele Nullstellen besitzt und sogar jeder Zahl in $[-1,1]$ von unendlich vielen x's im Intervall $(0,1]$ angenommen wird. Diese Funktion f ist der Ursprung für viele weitere Funktionen mit unerwarteten Eigenschaften.



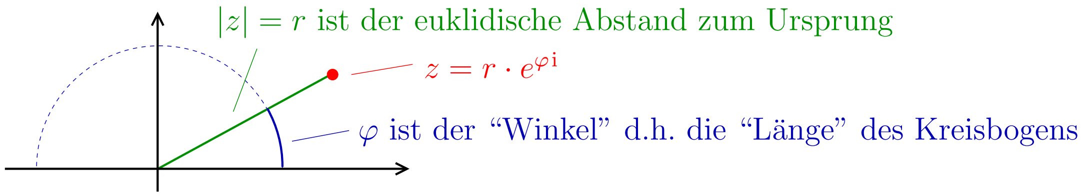
11.3. **Polarkoordinatendarstellung von komplexen Zahlen.**

Satz 11.11. (Satz über die Polarkoordinatendarstellung) *Zu jeder Zahl* $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *existiert genau ein* $r \in \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ *und genau ein* $\varphi \in [0, 2\pi)$, *so dass*

$$z = r \cdot e^{\varphi \mathrm{i}}.$$

Definition. Zu jeder Zahl $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ existiert also genau ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und genau ein $\varphi \in [0, 2\pi)$, so dass $z = r \cdot e^{\varphi \mathrm{i}}$. Dieses Zahlenpaar (r, φ) nennt man die *Polarkoordinaten* von z.

Beweis $(*)$. Es sei also $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Wir zeigen zuerst die Existenz von $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $z = re^{\varphi \mathrm{i}}$. Wir setzen $w := \frac{z}{|z|}$. Man beachte, dass $|w| = 1$. Wir wollen nun



im Folgenden zeigen, dass es ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $w = e^{\varphi \mathrm{i}} = \cos(\varphi) + \sin(\varphi)\,\mathrm{i}$ gibt. Wir schreiben $w = x + y\mathrm{i}$. Nachdem $|w| = 1$ folgt aus $|w|^2 = x^2 + y^2$, dass $|x| \leq 1$ und auch $|y| \leq 1$.

Behauptung. Es gibt ein $\psi \in [0, \pi]$ mit $\cos(\psi) = x$.

Für den Kosinus gilt $\cos(0) = 1$ und $\cos(\pi) = -\cos(0) = -1$. Die Kosinusfunktion ist stetig, also existiert, nach dem Zwischenwertsatz 8.3 ein $\psi \in [0, \pi]$, so dass $\cos(\psi) = x$. ⊞

Behauptung. Es ist $\sin(\psi) = y$ oder $\sin(\psi) = -y$.

Wir müssen also zeigen, dass $\sin(\psi)^2 = y^2$. Dies ist in der Tat der Fall, denn

$$\sin(\psi)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Lemma 11.3}}}{=} 1 - \cos(\psi)^2 = 1 - x^2 = \underbrace{x^2 + y^2}_{=|w|^2=1} - x^2 = y^2.$$

⊞

Wenn $\sin(\psi) = y$, dann gilt natürlich, dass

$$e^{\psi \mathrm{i}} = \cos(\psi) + \sin(\psi)\,\mathrm{i} = x + y\,\mathrm{i} = w.$$

Andererseits, wenn $\sin(\psi) = -y$, dann gilt:

$$\begin{aligned} e^{i(2\pi-\psi)} &= \cos(2\pi - \psi) + \sin(2\pi - \psi)\,\mathrm{i} \overset{\substack{\text{Lemma 11.2} \\ \downarrow}}{=} \cos(-\psi) + \sin(-\psi)\,\mathrm{i} \overset{\substack{\text{Lemma 11.10} \\ \downarrow}}{=} \cos(\psi) - \sin(\psi)\,\mathrm{i} \\ &= x + y\,\mathrm{i} = w. \end{aligned}$$

Nachdem $2\pi - \psi \in [\pi, 2\pi]$ haben wir also ein $\varphi \in [0, 2\pi]$ mit $w = e^{\varphi \mathrm{i}}$ gefunden. Nachdem $e^{2\pi \mathrm{i}} = e^{0 \mathrm{i}}$ gibt es auch ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $w = e^{\varphi \mathrm{i}}$. Nun gilt

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = |z| \cdot w = \underbrace{|z|}_{=:r} \cdot e^{\varphi \mathrm{i}}.$$

Es verbleibt zu zeigen, dass r und $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig bestimmt sind. Es ist klar, dass r eindeutig bestimmt ist, da $r = |z|$. Die Kosinusfunktion ist auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend.[74] Man kann damit auch leicht zeigen, dass $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig bestimmt ist. Die Ausarbeitung der Details verbleibt hierbei eine freiwillige Übungsaufgabe. ■

[74] In der Tat, es folgt aus $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$ und aus Satz 11.7, dass $\sin(x) > 0$ für $x \in (0, \pi)$. Es folgt dann aus dem Beweis von Satz 11.8, dass die Kosinusfunktion auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist.

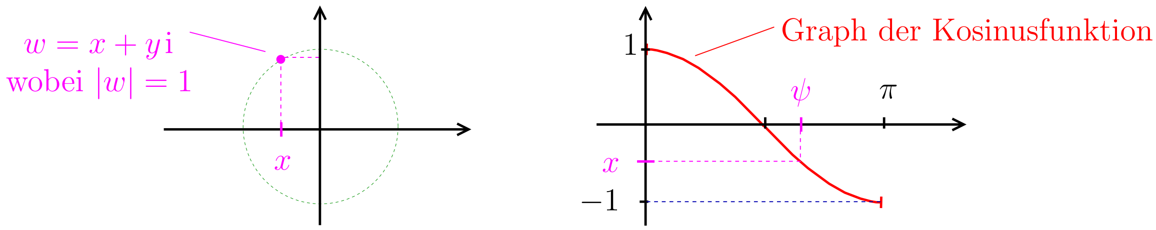
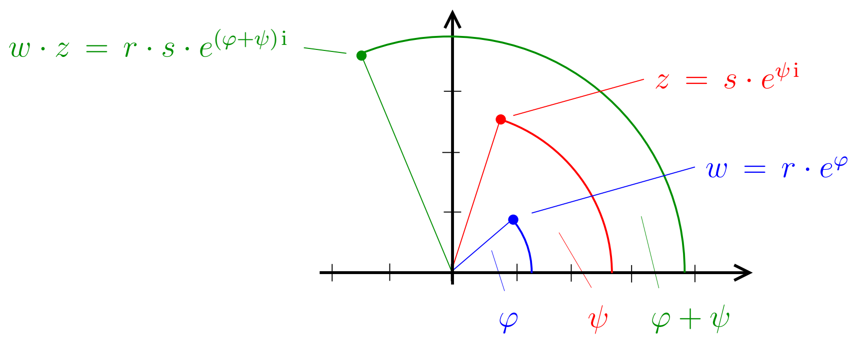


Abbildung 38. Skizze für den Beweis von Satz 11.11.

Bemerkung. Mit Satz 11.11 können wir jetzt die Multiplikation von komplexen Zahlen geometrisch interpretieren. Es seien also $z, w \in \mathbb{C}$. Nach Satz 11.11 können wir schreiben $w = r \cdot e^{\varphi\,\mathrm{i}}$ und $z = s \cdot e^{\psi\,\mathrm{i}}$. Dann gilt

$$w \cdot z \;=\; r \cdot e^{\varphi\,\mathrm{i}} \cdot s \cdot e^{\psi\,\mathrm{i}} \;=\; r \cdot s \cdot e^{(\varphi+\psi)\,\mathrm{i}}.$$

Wir sehen also, dass sich die "Winkel"[75] addieren und die Beträge multiplizieren.



11.4. **Die Einheitswurzeln** (∗)**.** Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Satz.

Satz 11.12. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $z \in \mathbb{C}$, dass*

$$z^n = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad z = e^{2\pi\,\mathrm{i}k/n}, \qquad \textit{wobei } k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Beweis (∗)*.* Wir beginnen mit einer Vorbemerkung. Für $z \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(e^z)^m \;=\; \underbrace{e^z \cdot \cdots \cdot e^z}_{m\text{-Mal}} \;=\; e^{z+\cdots+z} \;=\; e^{z\cdot m}.$$

Wir beweisen nur die "$\Longleftarrow$"-Richtung. Es sei also $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Dann gilt

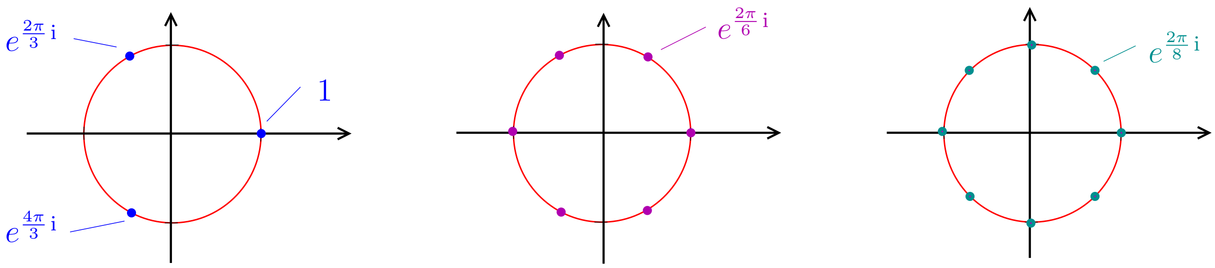
$$z \;=\; e^{2\pi\,\mathrm{i}\,\frac{k}{n}} \quad\Longrightarrow\quad z^n \;=\; \left(e^{2\pi\,\mathrm{i}\,\frac{k}{n}}\right)^n \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Vorbemerkung}}}{=}\; e^{2\pi\,\mathrm{i}\,\frac{k}{n}\cdot n} \;=\; e^{2\pi i\cdot k} \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Vorbemerkung}}}{=}\; \left(e^{2\pi i}\right)^k \;=\; 1^k \;=1.$$

[75]Wir setzen das Wort "Winkel" in Anführungszeichen, weil wir den Begriff Winkel in dieser Vorlesung nicht eingeführt haben.

Die "$\Longrightarrow$"-Richtung folgt ziemlich leicht aus dem Satz über die Polarkoordinatendarstellung. Nachdem wir die Aussage nicht verwenden werden, wollen wir die Details nicht ausführen. ■

Definition. Die komplexen Zahlen $z = e^{2\pi \mathrm{i} k/n}$, $k = 0, \ldots, n-1$ werden oft als die *n-ten Einheitswurzeln* bezeichnet.

Die letzte Abbildung des Kapitels zeigt die 3-ten, 6-ten sowie die 8-ten Einheitswurzeln.



die 3-ten Einheitswurzeln — die 6-ten Einheitswurzeln — die 8-ten Einheitswurzeln

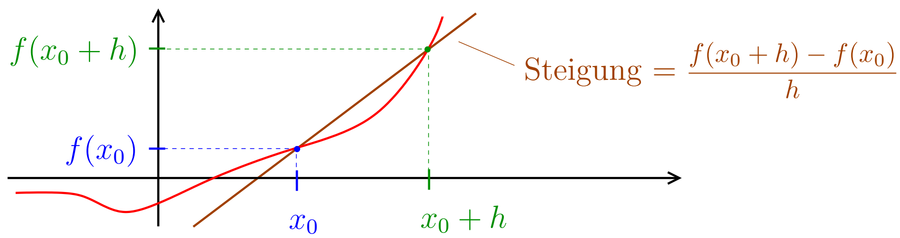
12. Differentiation

12.1. Definition der Ableitung und erste Eigenschaften.

Definition. Es sei[76] $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, es sei $x_0 \in (a,b)$ und es sei $h \neq 0$ mit $x_0 + h \in (a,b)$. Dann gilt:

$$\begin{array}{c}\text{Steigung der Geraden durch die beiden Punkte} \\ (x_0, f(x_0)) \text{ und } (x_0+h, f(x_0+h)) \text{ auf dem Graphen von } f\end{array} \quad = \quad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Wir bezeichnen diesen Wert als *Differenzenquotient von f bei x_0 bezüglich h.*



Der Gedanke ist nun zu betrachten, wie sich der Differenzquotienten verhält, wenn h "immer kleiner wird". Mathematisch heißt das, dass wir den Grenzwert des Differenzenquotienten mit $h \to 0$ betrachten, *falls dieser Grenzwert existiert.*

Definition. Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $x_0 \in (a,b)$. Wir sagen, f ist *differenzierbar in x_0*, wenn der Grenzwert[77]

$$f'(x_0) \; := \; \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert. Wir nennen $f'(x_0)$ die *Ableitung von f im Punkt x_0.*

Bemerkung. Es folgt direkt aus den Definitionen, dass

$$\lim_{h\to 0} \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \; = \; \lim_{x \to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Manchmal werden wir den Ausdruck auf der rechten Seite bevorzugen.

Definition. Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn f differenzierbar im Punkt $x_0 \in (a,b)$ ist, dann bezeichnen wir die Funktion

$$\begin{array}{rcl} \ell\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) \end{array}$$

---

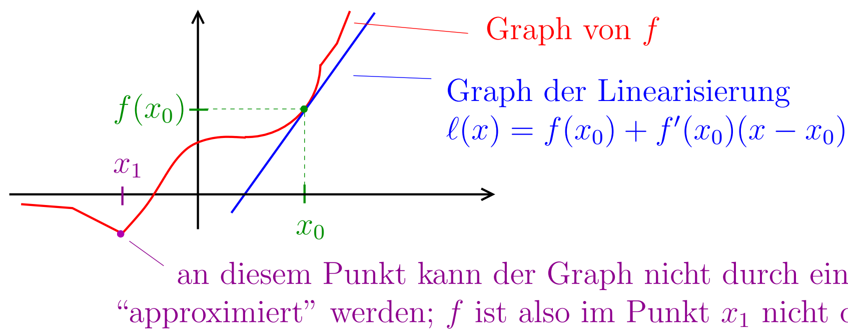
[76] In diesem Kapitel betrachten wir nur Funktionen, welche auf offenen Intervallen (a,b) definiert sind. Hierbei gilt, dass $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

[77] Wir betrachten also die Funktion $\begin{array}{rcl} (a-x_0,0)\cup(0,b-x_0) & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \end{array}$

und wir betrachten dann den Grenzwert mit $h \to 0$ für diese Funktion.

als die *Linearisierung von f am Punkt x_0*. Zudem bezeichnen wir den Graphen der Linearisierung als die *Tangente zum Graphen von f am Punkt x_0*.

Bemerkung. Die anschauliche Bedeutung der Differenzierbarkeit von f im Punkt x_0 ist, dass f in der "Nähe von x_0" durch eine lineare Funktion "approximiert" werden kann. Mit anderen Worten, der Graph kann in der "Nähe von $(x_0, f(x_0))$" durch eine Gerade approximiert werden.



Definition. Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen f ist *differenzierbar*, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar ist. Wir nennen dann die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f'\colon (a,b) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \qquad \text{die } \textit{1. Ableitung von } f.$$

Notation. Der Klarheit halber schreiben wir manchmal $\frac{df}{dx} := f'$ und $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} := f'(x_0)$.

Lemma 12.1. *Es seien $m, y \in \mathbb{R}$. Dann ist $x \mapsto m \cdot x + y$ differenzierbar und es gilt*[78]

$$\frac{d}{dx}(m \cdot x + y) = m \qquad \textit{oder knapper:} \qquad (m \cdot x + y)' = m.$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion $f(x) = m \cdot x + y$. Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(m\cdot(x_0 + h) + y) - (m\cdot x_0 + y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{m\cdot h}{h} = m. \qquad \blacksquare$$

Der folgende Satz gibt ein hilfreiches Kriterium für Differenzierbarkeit.

Satz 12.2. *Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in (a,b)$. Dann gilt:*

$$f \textit{ ist differenzierbar im Punkt } x_0 \iff \begin{array}{c} \textit{es gibt eine Funktion } \varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}, \\ \textit{welche } \text{stetig in } x_0 \textit{ ist, so dass} \\ f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\cdot\varphi(x) \textit{ für alle } x \in (a,b) \end{array}$$

Zudem gilt im Falle der Differenzierbarkeit, dass $\varphi(x_0) = f'(x_0)$.

[78] Wenn wir einen Ausdruck in x angeben, dann meinen wir damit die Funktion, welche auf der Teilmenge von $\mathbb{R}$ definiert ist, für den dieser Ausdruck definiert ist. Mit $m \cdot x + y$ meinen wir also die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion $x \mapsto m \cdot x + y$.

Beweis. Wir machen zwei Vorbemerkungen:

(1) Wie oben angemerkt gilt: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

(2) Nach Satz 7.9 gilt: φ ist stetig im Punkt $x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$.

Wir wenden uns nun dem eigentlichen Beweis des Satzes zu. Wir zeigen zuerst die "$\Rightarrow$"-Richtung. Wir nehmen also an, dass f differenzierbar ist im Punkt x_0. Wir setzen

$$\begin{aligned} \varphi\colon (a,b) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & \text{wenn } x_0 \neq x, \\ f'(x_0), & \text{wenn } x = x_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Es folgt aus (1) und (2), dass φ im Punkt x_0 stetig ist. Alle anderen Aussagen sind sowieso von φ erfüllt.

Wir beweisen nun die "$\Leftarrow$"-Richtung. Wir nehmen also an, dass es eine solche Funktion φ gibt. Dann gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (1)}}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wahl von } \varphi}}{=} \lim_{x\to x_0} \varphi(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus (2), da } \varphi \\ \text{im Punkt } x_0 \text{ stetig}}}{=} \varphi(x_0).$$

Wir haben also bewiesen, dass f in x_0 differenzierbar ist, und dass $\varphi(x_0) = f'(x_0)$. ■

Lemma 12.3. *Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $x_0 \in (a,b)$. Dann gilt:*

$$f \text{ ist differenzierbar im Punkt } x_0 \implies f \text{ ist stetig im Punkt } x_0.$$

Beweis. Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche im Punkt $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar ist. Nach Satz 12.2 gibt es eine Funktion $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, welche *stetig in* x_0 ist, so dass

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot \varphi(x) \qquad \text{für alle } x \in (a,b).$$

Die konstante Funktion $x \mapsto f(x_0)$ und die lineare Funktion $x \mapsto x - x_0$ sind natürlich stetig. Zudem ist nach Voraussetzung die Funktion $x \mapsto \varphi(x)$ stetig im Punkt x_0. Also folgt aus Satz 7.5 und der obigen Gleichheit, dass $x \mapsto f(x)$ im Punkt x_0 stetig ist. ■

Satz 12.4. (Ableitungsregeln) *Es seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ Funktionen, welche differenzierbar im Punkt $x \in (a,b)$ sind. Zudem sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktion $f+g$, λf und $f \cdot g$ im Punkt x differenzierbar, und es gilt:*

(1) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

(2) $(\lambda f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$

(3) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (*Produktregel*)

Wenn $g(x) \neq 0$, dann ist die Funktion $\frac{f}{g}$ im Punkt x differenzierbar, und es gilt:

(4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{g(x) \cdot f'(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g(x)^2}$ (*Quotientenregel*).

Beweis. Es seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ Funktionen, welche differenzierbar im Punkt $x \in (a,b)$ sind. Es folgt leicht aus den Definitionen, dass die ersten beiden Aussagen gelten.

Wir beweisen nun die Produktregel. Es ist

$$(f\cdot g)'(x) \;=\; \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\left(f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)\right) \;=$$

Wir wollen jetzt in den Ausdruck $f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)$ die beiden Differenzen $f(x+h)-f(x)$ und $g(x+h)-g(x)$ einführen, welche in den Definitionen von $f'(x)$ und $g'(x)$ auftauchen. Wir wenden jetzt genau den gleichen Trick wie im Beweis von Satz 3.4 an, nämlich wir führen eine geschickte Nullergänzung durch.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\big(f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)\big)\\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\big(f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x+h)\big) + \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\big(f(x)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)\big)\\
&= \underbrace{\lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\big(f(x+h) - f(x)\big)}_{=f'(x)} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} g(x+h)}_{=g(x),\text{ weil } g \text{ stetig}} + f(x) \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\big(g(x+h) - g(x)\big)}_{=g'(x)}\\
&= f'(x)\cdot g(x) + f(x) g'(x).
\end{aligned}$$

Wir wenden uns nun dem Beweis der Quotientenregel zu. Diese wird ganz ähnlich bewiesen wie die Produktregel. In der Tat, es ist[79]

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)} \frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)} \frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - \frac{g(x+h)-g(x)}{h} f(x)\right)\\
&= \frac{1}{g(x)^2}\left(f'(x)\cdot g(x) - g'(x) f(x)\right).
\end{aligned}$$

■

Beispiel. In Übungsblatt 9 werden wir mithilfe der Ableitungsregeln zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\frac{d}{dx} x^n \;=\; n \cdot x^{n-1}.$$

12.2. **Ableitung der Exponentialfunktion, sowie von Sinus und Kosinus.** Wir erinnern daran, dass nach der Definition auf Seite 90 und nach Satz 11.5 gilt:

$$\exp(x) \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{sowie} \quad \sin(x) \;=\; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Um die Ableitungen der Exponentialfunktion und der trigonometrischen Funktionen bestimmen zu können, müssen wir erst einige grundlegende Grenzwerte berechnen.

---

[79]Der besseren Lesbarkeit wegen unterschlagen wir im Argument folgenden subtilen Punkt. Nach Voraussetzung ist $g(x) \neq 0$. Nach Lemma 12.3 wissen wir, dass g im Punkt x stetig ist. Also gibt es ein $\epsilon > 0$ so, dass für alle $h \in (-\epsilon, \epsilon)$ gilt, dass $g(x+h) \neq 0$. Insbesondere macht es Sinn $g(x+h)$ im Nenner zu erlauben.

Satz 12.5. (1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x)-1}{x} = 1$ *und* (2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1.$

Beweis von Satz 12.5 (1). [80] Für den Beweis von Satz 12.5 benötigen wir folgende, erst mal etwas unmotivierte Behauptung.

Behauptung 1. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \le \frac{1}{2}$ gilt $\left|\sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{x^m}{(m+2)!}\right| \le 2.$

Es sei also $|x| \le \frac{1}{2}$. Dann gilt:

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(m+2)!}\right| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus Satz 6.10}}}{\le} \sum_{m=0}^{\infty} \left|\frac{x^m}{(m+2)!}\right| = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|x|^m}{(m+2)!} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus Satz 3.17, da}\\ |x|\le\frac{1}{2} \text{ und } (m+2)!\ge 1}}{\le} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^m \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 3.16, da dies eine}\\ \text{geometrische Reihe ist}}}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

⊞

Behauptung 2. Es seien $f, g\colon (-\eta,\eta) \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, so dass $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ und so dass g beschränkt ist, dann gilt $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot g(x) = 0$.

Die Behauptung folgt aus Satz 3.5 zusammen mit Satz 7.10. ⊞

Wir wenden uns jetzt dem eigentlichen Beweis der Aussage zu. Nachdem es manchmal leichter ist zu zeigen, dass ein Ergebnis "0" ist, beweisen wir lieber die äquivalente Aussage: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\big(\exp(x) - 1 - x\big) = 0$. In der Tat gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\big(\exp(x) - 1 - x\big) &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\Big(1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 - x\Big) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &\underset{\substack{\text{denn } \frac{1}{x}\cdot x^n = x\cdot x^{n-2}\\ \downarrow}}{=} \lim_{x\to 0} x \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} \underset{\substack{\text{Substitution } m=n-2\\ \downarrow}}{=} \lim_{x\to 0} x\cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(m+2)!}}_{\substack{\text{nach Behauptung 1 ist}\\ \text{für } |x|\le\frac{1}{2} \text{ der Betrag}\\ \text{durch 2 beschränkt}}} \underset{\substack{\text{Behauptung 2}\\ \downarrow}}{=} 0\end{aligned}$$

■

Beweis von Satz 12.5 (2). Der Beweis verläuft ganz analog zum Beweis von Teil (1). In der Tat gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\big(\sin(x) - x\big) &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\Big(x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - x\Big) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \lim_{x\to 0} x\cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \lim_{x\to 0} x\cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \cdot \frac{x^{2m+2}}{(2m+3)!}}_{\substack{\text{für } |x|\le\frac{1}{2} \text{ ist der Betrag}\\ \text{wiederum durch 2 beschränkt}}} = 0\end{aligned}$$

Aus dieser Berechnung folgt sofort, dass $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. ■

[80] Bevor man den technisch etwas anspruchsvollen Beweis liest, kann es hilfreich sein, sich die Aussage des Satzes, mithilfe der obigen Beschreibungen von $\exp(x)$ und $\sin(x)$ plausibel zu machen.

Mithilfe von Satz 12.5können wir jetzt die Ableitungen der Exponentialfunktion, der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion bestimmen.

Satz 12.6.
(1) $\frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x)$ (2) $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$ (3) $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$.

Beweis. Wir betrachten zuerst die Exponentialfunktion. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\exp(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\exp(x)\cdot\exp(h)-\exp(x)}{h} \\ &= \exp(x)\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h}}_{=1,\text{ nach Satz 12.5}} = \exp(x)\cdot 1 = \exp(x). \end{aligned}$$

Wir wenden uns nun der Sinusfunktion zu. Wir führen folgende Berechnung durch:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sin(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\ &\underset{\text{nach Lemma 11.9 (2)}}{\uparrow}{=} \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = \underbrace{\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\tfrac{h}{2}\right)}_{=\cos(x),\text{ weil cos nach Satz 11.6 stetig ist}} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}}_{=1\text{ nach Satz 12.5 und Substitution } x=\frac{h}{2}} = \cos(x). \end{aligned}$$

Ganz ähnlich kann man mithilfe von Lemma 11.9 (1) zeigen, dass $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$. Dies ist eine Übungsaufgabe auf Übungsblatt 9. ■

12.3. **Die Kettenregel und die Umkehrregel.**

Satz 12.7. (Kettenregel) *Es seien $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ und $g\colon (c,d)\to\mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $f((a,b))\subset(c,d)$. Wenn f im Punkt $x_0\in(a,b)$ differenzierbar ist und wenn g im Punkt $f(x_0)$ differenzierbar ist, dann ist $g\circ f$ im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

Beweis. Wir setzen $y_0 := f(x_0)$. Nach Satz 12.2 “$\Rightarrow$” gibt es Funktionen

(1) $\alpha\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ mit $f(x)-f(x_0) = (x-x_0)\cdot\alpha(x)$, wobei α stetig in x_0 ist,
(2) $\beta\colon (c,d)\to\mathbb{R}$ mit $g(y)-g(y_0) = (y-y_0)\cdot\beta(y)$, wobei β stetig in y_0 ist.

Es gilt nun:

$$\begin{aligned} (g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0) &= g(f(x)) - g(\overbrace{f(x_0)}^{=y_0}) \overset{\text{Anwendung von (2) auf } y=f(x)}{\overset{\downarrow}{=}} (f(x)-f(x_0))\cdot\beta(f(x)). \\ &\underset{\text{Anwendung von (1)}}{\underset{\uparrow}{=}} (x-x_0)\cdot\alpha(x)\cdot\beta(f(x)). \end{aligned}$$

Zudem folgt aus Satz 7.7, dass die Funktion $x\mapsto\alpha(x)\cdot\beta(f(x))$ stetig in x_0 ist. Es folgt also aus Satz 12.2 “$\Leftarrow$”, dass die Funktion $g\circ f$ im Punkt x_0 differenzierbar ist. Zudem gilt

$$(g\circ f)'(x_0) \underset{\uparrow}{=} \alpha(x_0)\cdot\beta(f(x_0)) \underset{\uparrow}{=} f'(x_0)\cdot g'(f(x_0)).$$

folgt aus dem letzten Satz von Satz 12.2

■

Korollar 12.8. *Für jedes $a \in (0,\infty)$ gilt* $$\frac{d}{dx}a^x = a^x \cdot \ln(a).$$

Beweis. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{d}{dx}a^x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } a^x}}{=} \frac{d}{dx}\exp(\ln(a)\cdot x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel mit } f(x)=\ln(a)\cdot x \text{ und } g(x)=\exp(x)}}{=} \exp'(\ln(a)\cdot x)\cdot(\ln(a)\cdot x)' \overset{\substack{\text{denn nach Satz 12.6 gilt } \exp'=\exp \\ \downarrow}}{=} \exp(\ln(a)\cdot x)\cdot \ln(a) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } a^x}}{=} a^x\cdot\ln(a).$$ ■

Satz 12.9. (Umkehrregel) *Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monotone Funktion. Wenn f in einem Punkt $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar ist mit $f'(x_0) \neq 0$, dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} im Punkt $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und es gilt:*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Bemerkung. Die Aussage der Umkehrregel wird in Abbildung 39 illustriert:

(1) Aus Lemma 9.4 wissen wir, dass wir den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} erhalten, indem wir den Graphen von f an der $x=y$-Diagonale spiegeln.

(2) Ganz analog zu (1) erhalten wir die Tangente zum Graphen von f^{-1} am Punkt $(y_0, f^{-1}(y_0)) = (f(x_0), x_0)$, indem wir die Tangente zum Graphen von f am Punkt $(x_0, f(x_0))$ an der $x=y$-Diagonale spiegeln.

(3) Ganz allgemein gilt jedoch, dass wenn wir eine Gerade mit Steigung m an der $x=y$-Diagonale spiegeln, erhalten wir eine Gerade mit Steigung $\frac{1}{m}$.

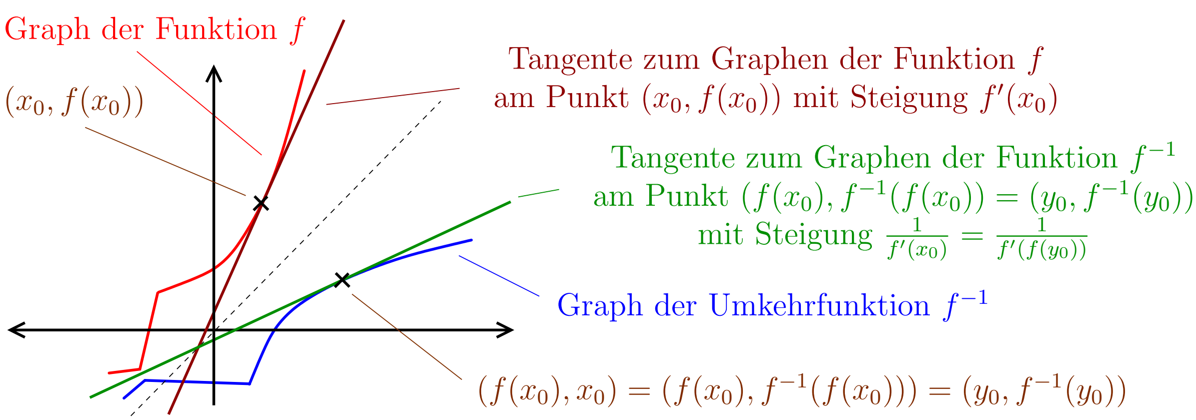


Abbildung 39. Die Ableitung der Umkehrfunktion.

Beweis. Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monotone Funktion und zudem sei $x_0 \in (a,b)$. Wir betrachten im Folgenden den Fall, dass f streng monoton steigend ist. Der Fall, dass f streng monoton fallend ist, wird ganz ähnlich bewiesen. Es folgt nun aus Lemma 9.2, dass die Umkehrfunktion auf dem offenen Intervall $(f(a), f(b))$ definiert ist.

Wir nehmen nun an, dass f im Punkt x_0 differenzierbar ist mit $f'(x_0) \neq 0$.

(1) Nach Satz 12.2 gibt es eine Funktion $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, welche *stetig in* x_0 ist, mit

$$(*) \qquad f(x) - f(x_0) \; = \; (x - x_0) \cdot \varphi(x).$$

Wir wollen nun mithilfe des Differenzierbarkeitskriteriums aus Satz 12.2 zeigen, dass die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon (f(a), f(b)) \to \mathbb{R}$ im Punkt $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar ist. Für beliebiges $y \in (f(a), f(b))$ folgt aus $(*)$, angewandt auf $x := f^{-1}(y)$ und $x_0 := f^{-1}(y_0)$, dass

$$y - y_0 \; = \; (f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)) \cdot \varphi(f^{-1}(y)).$$

Also ist

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) \; = \; \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))} \cdot (y - y_0).$$

Es folgt aus Satz 9.6 und Satz 7.7, dass die Abbildung $y \mapsto \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}$ im Punkt y_0 stetig ist. Also ist die Funktion f^{-1} nach Satz 12.2 im Punkt y_0 differenzierbar.

(2) Es verbleibt die Ableitung der Umkehrfunktion im Punkt y_0 zu bestimmen:[81] [82][83]

$$(f \circ f^{-1})(y) \; = \; y \Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dy}\Big|_{y=y_0} (f \circ f^{-1})(y)}_{\substack{= f'(f^{-1}(y_0)) \cdot (f^{-1})'(y_0) \\ \text{nach der Kettenregel}}} \; = \; \underbrace{\frac{d}{dy}\Big|_{y=y_0} y}_{=1} \Rightarrow (f^{-1})'(y_0) \; = \; \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

■

Korollar 12.10. $\displaystyle \frac{d}{dx} \ln(x) \; = \; \frac{1}{x}.$

Beweis. Es ist

$$\frac{d}{dx} \ln(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Umkehrregel angewandt auf } f(x) = \exp(x)}}{=} \frac{1}{\exp'(\ln(x))} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn nach Satz 12.6 gilt } \exp' = \exp}}{=} \frac{1}{\exp(\ln(x))} \; = \; \frac{1}{x}.$$

■

Korollar 12.11. *Für alle* $d \in \mathbb{R}$ *gilt*[84] $\displaystyle \frac{d}{dx} x^d \; = \; d \cdot x^{d-1}$ *als Funktion auf* $(0, \infty)$.

---

[81] Die folgende Berechnung ersetzt nicht den gerade erst erbrachten Beweis, dass die Umkehrfunktion im Punkt y_0 differenzierbar ist, denn in dieser Berechnung verwenden wir ja die Kettenregel und hierbei verwenden wir schon implizit, dass wir in (1) gezeigt hatten,das f^{-1} im Punkt y_0 differenzierbar ist.

[82] Wir hätten die Ableitung von f^{-1} auch in (1) mithilfe des Nachsatzes von Satz 12.2 bestimmen können, aber das Argument, welches wir jetzt geben, kann man sich leichter merken.

[83] Mit diesem an sich einfachen Beweis kann man sich auch jederzeit leicht die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion herleiten.

[84] Für beliebiges $d \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $x \mapsto x^d$ nur für $x \in (0, \infty)$ definiert. Für $d \in \mathbb{N}_0$ ist die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ und für $d \in \mathbb{Z}$ ist diese Funktion immerhin noch auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert. Für $d \in \mathbb{Z}$ beweisen wir die Ableitungsregel $\frac{d}{dx} x^d = d \cdot x^{d-1}$ in Übungsblatt 9 mithilfe der Produkt- und der Quotientenregel.

Beweis. Es sei $d \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\frac{d}{dx}x^d \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } x^d}}{=} \frac{d}{dx}\exp(\ln(x)\cdot d) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel angewandt auf} \\ f(x)=\ln(x)\cdot d \text{ und } g(x)=\exp(x)}}{=} \exp'(\ln(x)\cdot d)\cdot(\ln(x)\cdot d)' \overset{\substack{\text{denn nach Satz 12.6 gilt } \exp'=\exp \text{ und} \\ \text{nach Korollar 12.10 gilt } \ln(x)'=\frac{1}{x} \\ \downarrow}}{=} \underbrace{\exp(\ln(x)\cdot d)}_{=\exp(\ln(x))^d=x^d}\cdot\frac{1}{x}\cdot d = x^{d-1}\cdot d.$$

■

Beispiel. Es gilt: $\displaystyle \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Korollar 12.11}}}{=} \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$ als Funktion auf $(0,\infty)$.

12.4. **Stetig differenzierbare Funktionen.** Es sei $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wir erhalten dann also aus f eine neue Funktion, nämlich die 1. Ableitung

$$\begin{aligned} f'\colon (a,b) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x). \end{aligned}$$

Wir können uns nun fragen, was für Eigenschaften diese Funktion besitzt. Von den Beispielen her, welche wir bis jetzt betrachtet hatten, könnte man meinen, dass die Ableitung immer stetig ist. Das folgende Beispiel zeigt jedoch, dass dies nicht notwendigerweise der Fall ist.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^2\cdot\sin(\frac{1}{x}), & \text{wenn } x\neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x=0. \end{cases} \end{aligned}$$

In Übungsblatt 9 werden wir sehen, dass die Funktion in jedem Punkt differenzierbar ist, insbesondere auch im Punkt $x=0$, wo die Ableitung 0 beträgt. Die Ableitung von f ist also gegeben durch

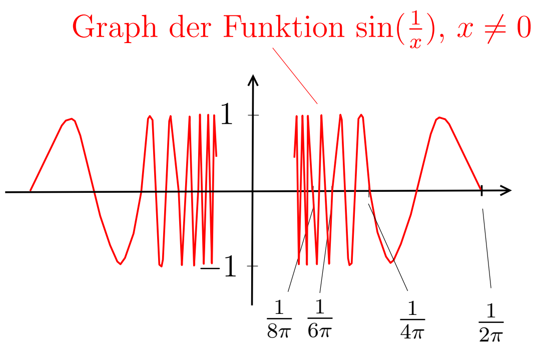
$$\begin{aligned} f'\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 2x\cdot\sin(\frac{1}{x})-\cos(\frac{1}{x}), & \text{wenn } x\neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x=0. \end{cases} \end{aligned}$$

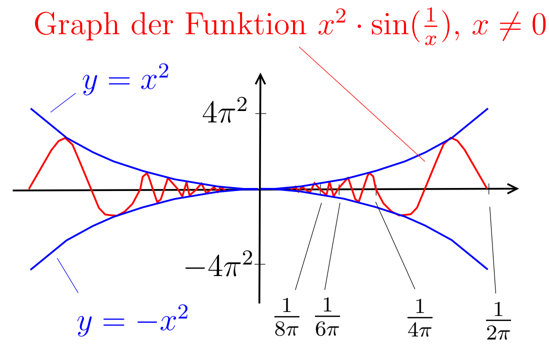
In Übungsblatt 9 zeigen wir, dass diese *Ableitungsfunktion im Punkt* $x=0$ nicht *stetig* ist.

Dieses leicht verstörende Beispiel führt uns zu folgender Definition, welche im Folgenden öfters eine Rolle spielen wird.

Definition. Es sei $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn f differenzierbar ist, und wenn zudem f' stetig ist, dann heißt f *stetig differenzierbar.*

Wir beschließen das Kapitel mit folgender fast schon selbsterklärender Definition.





Definition. Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wenn die Ableitung f' differenzierbar ist, dann schreiben wir

$$f^{(2)} \;:=\; f'' \;:=\; (f')',$$

genannt die *2. Ableitung von f*. Allgemeiner, wenn die $(n-1)$-te Ableitung von f differenzierbar ist, dann definieren wir die *n-te Ableitung von f* als

$$f^{(n)} \;:=\; (f^{(n-1)})'$$

und wir sagen, f ist *n-fach differenzierbar*.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} -x^2, & \text{wenn } x \leq 0, \\ x^2, & \text{wenn } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Man kann ohne große Mühe zeigen, dass die Funktion f differenzierbar ist mit Ableitung

$$\begin{aligned} f'\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} -2x, & \text{wenn } x \leq 0, \\ 2x, & \text{wenn } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

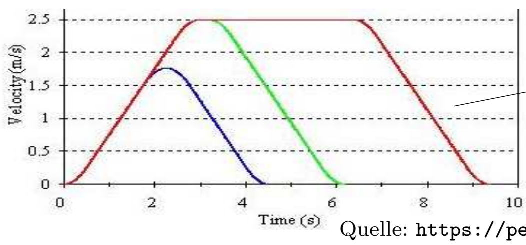
Mit anderen Worten, es ist $f'(x) = 2 \cdot |x|$. Die Funktion f' ist stetig, jedoch ist die Funktion f' im Punkt $x = 0$ nicht differenzierbar. Also ist die ursprüngliche Funktion f stetig differenzierbar, jedoch nicht zweimal differenzierbar ist.

Beispiel. In diesem Beispiel wollen wir kurz aufzeigen, dass höhere Ableitungen auch im echten Leben durchaus eine Rolle spielen. Nehmen wir an, wir sollen die Bahn eines Aufzugs programmieren, welche bei $t = 0$ bei $h(0) = 0$ anfängt und bei einer Zeit T bei $h(T) = H$ angekommen ist. Dazu müssen wir eine Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstruieren mit folgenden Eigenschaften:

(1) $h(0) = 0$ und $h(T) = H$.
(2) T sollte möglichst klein sein, Sie wollen ja schnell am Ziel sein.
(3) $|h'(t)|$ sollte aus Sicherheitsgründen nicht größer als $2,5\frac{m}{s}$ sein.

(4) $|h''(t)|$ entspricht der Kraft, welche auf einen Körper wirkt. Diese sollte aus Gesundheitsgründen durch $0,1 \cdot g = 0,1 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}$ begrenzt sein.

(5) $h^{(3)}(t)$, d.h. die Änderung der Kraft, welche auf einen Körper wirkt, wird in der Physik als *Ruck* bezeichnet. Der Absolutbetrag des Rucks, d.h. $|h^{(3)}(t)|$, sollte ebenfalls niedrig gehalten werden, denn großer Ruck wird von Menschen normalerweise als unangenehm empfunden.[85]



Geschwindigkeiten von Aufzügen

Quelle: `https://peters-research.com/index.php/papers/ideal-lift-kinematics/`

[85] Außer man ist auf der Dult und zahlt ein Vermögen, um genau das zu erfahren.

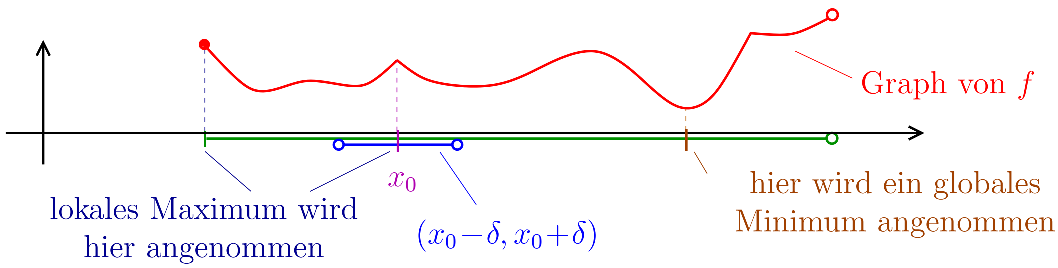
13.1. Globale und lokale Extrema von Funktionen.

Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $x_0 \in D$.

(1) Wir sagen f *nimmt bei x_0 ein globales Maximum* an, wenn gilt:
$$f(x_0) \;\geq\; f(x) \qquad \text{für alle } x \in D.$$

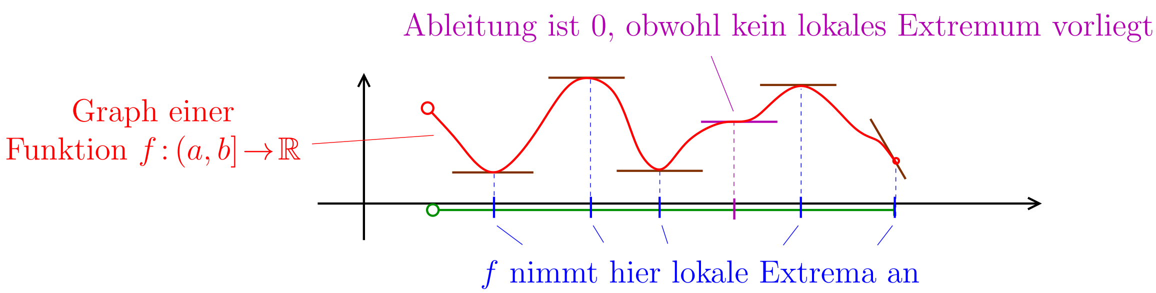
(2) Wir sagen, f *nimmt bei x_0 ein lokales Maximum* an, wenn gilt:
$$\text{es gibt ein } \delta > 0 \text{, so dass} \quad f(x_0) \;\geq\; f(x) \qquad \text{für alle } x \in D \text{ mit } x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

Ganz analog definieren wir *lokales und globales Minimum*. Wir sagen f nimmt bei x_0 ein *lokales Extremum* an, wenn f bei x_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum annimmt.



Definition. Es seien $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$. Für ein Intervall der Form $[a,b]$, $(a,b]$ oder $[a,b)$ bezeichnen wir das Intervall (a,b) als das *Innere des Intervalls*.

Satz 13.1. *Es sei I ein Intervall und es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche im Inneren des Intervalls differenzierbar ist.*[86] *Zudem sei $x_0 \in I$ ein Punkt im Inneren des Intervalls. Wenn f ein lokales Extremum in x_0 annimmt, dann ist $f'(x_0) = 0$.*



Bemerkung. Die Umkehrung der Aussage von Satz 13.1 gilt nicht: Wenn $f'(x_0) = 0$ bedeutet das nicht, dass bei x_0 ein lokales Extremum vorliegt. Wenn wir beispielsweise $f(x) = x^3$ betrachten, dann ist $f'(x) = 3x^2$, also ist $f'(0) = 0$, aber 0 liegt kein lokales Extremum vor.

Beweis. Es sei I ein Intervall und es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche im Inneren des Intervalls differenzierbar ist. Zudem sei $x_0 \in I$ ein Punkt im Inneren des Intervalls.

[86] Wenn also beispielsweise $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist, dann fordern wir, dass f auf dem Intervall (a,b) differenzierbar ist. Im Punkt a fordern wir, dass f stetig ist, aber auch nicht mehr.

Wir nehmen an, dass f bei x_0 ein lokales Minimum annimmt. (Der Fall, dass ein lokales Maximum vorliegt, wird ganz analog bewiesen.) Es gibt also per Definition ein $\delta > 0$, so dass $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$ für alle $h \in (-\delta, \delta)$.

Nachdem x_0 im Inneren des Intervalls liegt und nachdem f differenzierbar ist, existiert also der Grenzwert

$$f'(x_0) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Nach der Definition des Grenzwertes $\lim\limits_{h\to 0}$ einer Funktion, siehe Seite 102, müssen die links- und rechtsseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{h\nearrow 0}$ und $\lim\limits_{h\searrow 0}$ existieren und diese müssen mit $f'(x_0)$ übereinstimmen. Es gilt also

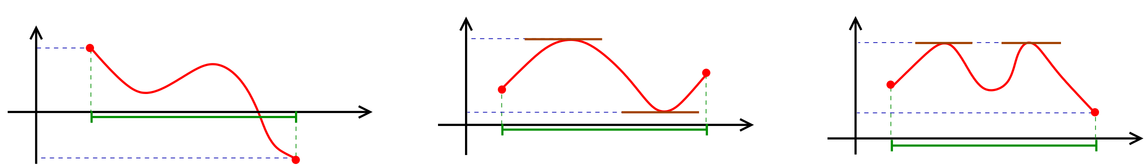
$$f'(x_0) \;=\; \lim_{h\nearrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\substack{\text{für } h\in(-\delta,0) \text{ gilt:}\\ h<0 \text{ und } f(x_0+h)\geq f(x_0)\\ \text{also ist der Bruch } \leq 0}} \;\leq\; 0 \qquad \text{und es gilt } \; f'(x_0) \;=\; \lim_{h\searrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\substack{\text{für } h\in(0,\delta) \text{ gilt:}\\ h>0 \text{ und } f(x_0+h)\geq f(x_0)\\ \text{also ist der Bruch } \geq 0}} \;\geq\; 0.$$

Wir haben also gezeigt, dass $f'(x_0) \leq 0$ und $f'(x_0) \geq 0$. Dies impliziert, dass $f'(x_0) = 0$. ■

Bemerkung. Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall. Nach Satz 8.2 nimmt f ein globales Maximum an. Es gibt nun zwei Möglichkeiten:

(1) Das globale Maximum wird in den Endpunkten a oder b angenommen.
(2) Das globale Maximum wird im Inneren (a, b) des Intervalls angenommen. Wenn f auf (a, b) differenzierbar ist, dann muss nach Satz 13.1 die Ableitung an diesem Punkt null sein.

Die Beobachtung erlaubt es uns oft, das globale Maximum einer explizit gegebenen Funktionen zu bestimmen. Die gleiche Diskussion gilt natürlich auch für Minima anstatt Maxima.



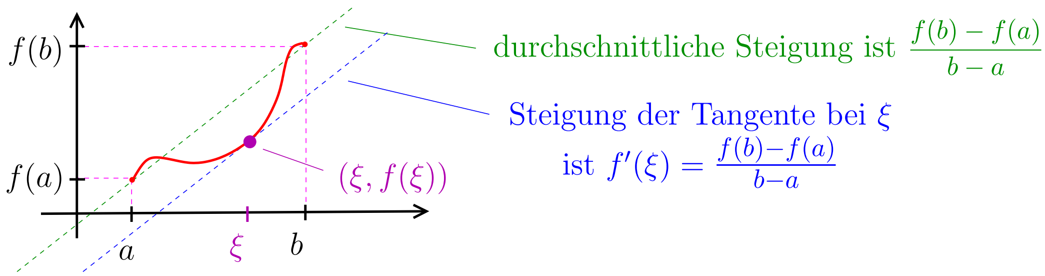
globales Extremum wird am Rand angenommen oder im Inneren, dort gilt dann $f'(x_0)=0$

13.2. **Mittelwertsatz der Differentialrechnung.** Der folgende Satz ist einer der ganz zentralen Sätze der Analysis I.

Satz 13.2. (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Es seien $a < b \in \mathbb{R}$ und es sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche auf (a, b) differenzierbar ist. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$, so dass*

$$f'(\xi) \;=\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Bemerkung. Wir können uns $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ als die "durchschnittliche Steigung" der Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ vorstellen. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt also, dass es ein $\xi \in (a,b)$ gibt, so dass an dem Punkt ξ die Ableitung, d.h. die Steigung der Tangente im Punkt $(\xi, f(\xi))$, gerade der durchschnittlichen Steigung entspricht.



Wir beweisen den Mittelwertsatz zuerst für den Spezialfall, dass $f(a) = f(b)$. Dieser Spezialfall ist schon so wichtig, dass er als eigener Satz formuliert wird.

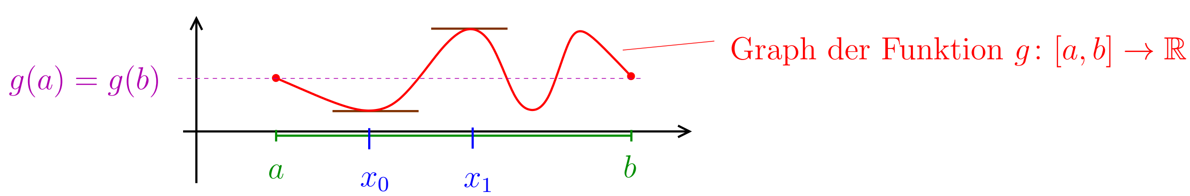
Satz 13.3. (Satz von Rolle[87]) *Es seien $a < b \in \mathbb{R}$ und es sei $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche auf (a,b) differenzierbar ist. Wenn $g(a) = g(b)$, dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$, so dass $g'(\xi) = 0$.*

Beweis des Satzes von Rolle. Da g stetig ist existieren nach Satz 8.2 zwei reelle Zahlen $x_0, x_1 \in [a,b]$, so dass

$$g(x_0) \ \geq\ g(x) \ \geq\ g(x_1) \qquad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Bei x_0 liegt also insbesondere ein lokales Maximum vor und bei x_1 liegt insbesondere ein lokales Minimum vor.

(1) Wenn $x_0 \in (a,b)$, dann folgt aus Satz 13.1, dass $g'(x_0) = 0$. Also sind wir fertig.
(2) Genauso, wenn $x_1 \in (a,b)$, dann folgt wiederum aus Satz 13.1, dass $g'(x_1) = 0$. Wir sind also wiederum fertig.
(3) Wenn x_0 und x_1 auf den Endpunkten des Intervalls liegen, dann folgt aus $g(a) = g(b)$, dass $g(a) = g(b)$ sowohl der maximale als auch der minimale Funktionswert ist. Es folgt also, dass, die Funktion g konstant ist. Dies bedeutet aber, dass $g'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. ∎



Beweis des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung.

Wenn $f(a) = f(b)$, dann ist die gewünschte Aussage gerade der Satz von Rolle. In der Tat werden wir nun den allgemeinen Fall mit einem kleinen Trick auf den Satz von Rolle zurück führen.

[87] Der Satz ist nach dem französischen Mathematiker Michel Rolle (1652-1719) benannt.

Wir betrachten die stetige Funktion

$$g({\color{red}x}) \;:=\; f({\color{red}x}) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot({\color{red}x}-a),$$

welche auf dem Intervall $[a,b]$ definiert ist. Diese Funktion ist stetig und sie ist differenzierbar auf (a,b). Durch explizites Einsetzen sieht man, dass $g(a) = f(a) = g(b)$. Nach dem Satz von Rolle existiert also ein $\xi \in (a,b)$, so dass $g'(\xi) = 0$. Nachdem

$$g'({\color{red}x}) \;=\; f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

folgt also, wie gewünscht, dass

$$f'(\xi) \;=\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad \blacksquare$$

Im Folgenden wollen wir einen Zusammenhang zwischen Monotonie und Ableitung herleiten. In der folgenden Abbildung erinnern wir dazu noch einmal an den Begriff der (strengen) Monotonie, welchen wir auf Seite 113 eingeführt hatten.

monoton steigende Funktion — streng monoton steigende Funktion

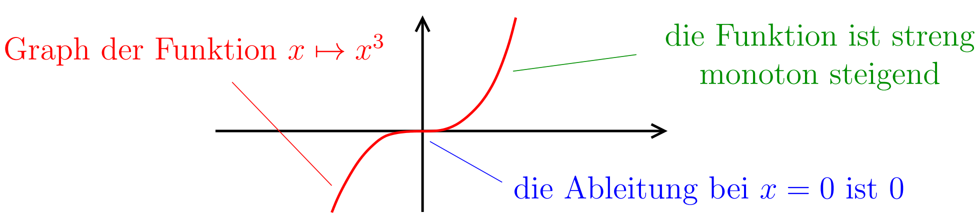
Satz 13.4. (Monotoniesatz) *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche im Inneren des Intervalls differenzierbar ist. Dann gilt:*

(1) $f'(x) \geq 0$ *für alle inneren Punkte x von I* $\Longleftrightarrow$ *f ist monoton steigend*

(2) $f'(x) > 0$ *für alle inneren Punkte x von I* $\Longrightarrow$ *f ist streng monoton steigend.*

Zudem gelten die offensichtlichen analogen Aussagen für (streng) monoton fallende Funktionen.

Bemerkung. Im Allgemeinen gilt in (2) nicht die Umkehrung. Wir betrachten beispielsweise die Funktion $f(x) = x^3$, deren Graphen wir unten skizzieren. Diese Funktion ist streng monoton steigend. Aber es gilt $f'(0) = 0$, d.h. die Ableitung ist nicht immer positiv.

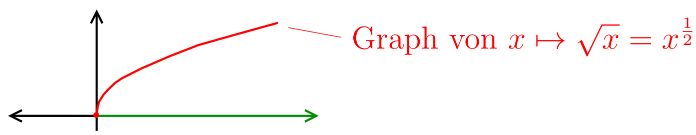


Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Nach der Diskussion auf Seite 119 ist diese Funktion stetig. Nach Korollar 12.11 ist die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ auf dem offenen Intervall $(0,\infty)$ differenzierbar und für jedes $x \in (0,\infty)$

gilt:
$$f'(x) \;=\; \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} \;>\; 0.$$
Es folgt also aus Satz 13.4, dass die Funktion streng monoton steigend ist.

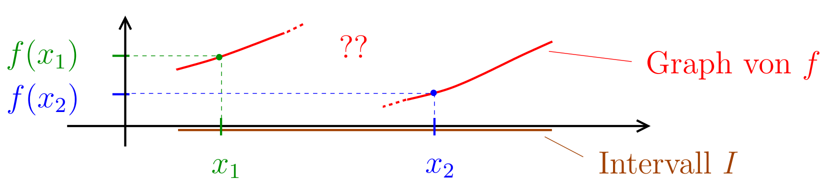


Beweis. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche im Inneren des Intervalls differenzierbar ist.

(1) Wir beweisen zuerst die "$\Leftarrow$"-Richtung. Es sei also f monoton steigend. Dann gilt für alle inneren Punkte x des Intervalls I, dass
$$f'(x) \;=\; \lim_{h\searrow 0} \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\substack{\text{da } h>0 \text{ und } f \text{ monoton steigend}\\ \text{ist der Zähler } \geq 0 \text{ und der Nenner } >0,\\ \text{also ist der Quotient } \geq 0}} \;\geq\; 0.$$
Wir beweisen nun die "$\Rightarrow$"-Richtung. Es sei also $f'(x) \geq 0$ für alle x im Inneren des Intervalls I. Wir müssen also folgende Behauptung beweisen:

Behauptung. Für alle $x_2 > x_1$ gilt $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis durch. Wir nehmen nun also an, dass es $x_2 > x_1$ in I gibt, so dass $f(x_2) < f(x_1)$. Wenn wir den Mittelwertsatz 13.2 auf die Einschränkung von f auf $[x_1, x_2]$ anwenden, erhalten wir ein $\xi \in (x_1, x_2)$, so dass
$$f'(\xi) \;=\; \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \qquad \text{also folgt:} \qquad f'(\xi) \;=\; \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{da } x_2>x_1 \text{ und } f(x_2)<f(x_1)}}{<}\; 0.$$
im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $f'(x) \geq 0$ für alle x im Inneren von I.

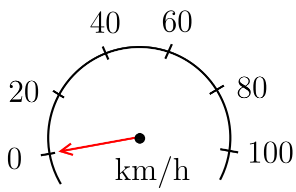


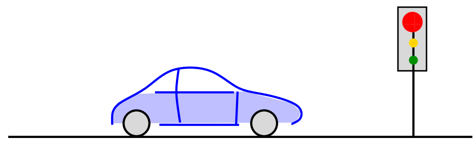
(2) Die zweite Aussage des Satzes wird eigentlich genau wie die "$\Rightarrow$"-Richtung von (1) mithilfe eines Widerspruchbeweises bewiesen.[88] ∎

[88] Es ist eine gute Übungsaufgabe sich zu überlegen, warum man denn die "$\Leftarrow$"-Richtung von (2) nicht auch ganz analog wie die "$\Leftarrow$"-Richtung von (1) beweisen geht. Was läuft da schief?

Korollar 13.5. (Tachosatz) *Es sei I ein Intervall und es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche im Inneren des Intervalls differenzierbar ist. Wenn $f'(x) = 0$ für alle x im Inneren von I, dann ist f konstant.*

Bemerkung. Etwas salopp besagt das Korollar also: wenn der Tacho des Autos immer bei 0 ist, dann ist das Auto immer am gleichen Ort.





Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) \underset{\uparrow}{=} 2\sin(x)\cdot\sin'(x) + 2\cdot\cos(x)\cdot\cos'(x) \underset{\uparrow}{=} 2\sin(x)\cdot\cos(x) + 2\cos(x)\cdot(-\sin(x)) = 0.$$

aus $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ und aus der Kettenregel folgt: $(f(x)^n)' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$

nach Satz 12.6 gilt $\sin'(x) = \cos(x)$ und $\cos'(x) = -\sin(x)$

Aus Korollar 13.5 folgt also, die uns natürlich schon längst bekannte Tatsache, dass die Funktion $x \mapsto \sin^2(x) + \cos^2(x)$ eine konstante Funktion ist.

Beweis. Es sei I ein Intervall und es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche im Inneren des Intervalls differenzierbar ist, und so dass $f'(x) = 0$ für alle x im Inneren von I. Es folgt aus dem Monotoniesatz 13.4, dass f sowohl monoton steigend als auch monoton fallend ist. Das ist nur möglich, wenn f konstant ist.[89] ■

Es sei I ein Intervall und es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche im Inneren des Intervalls differenzierbar ist. Zudem sei $x_0 \in I$ ein Punkt im Inneren des Intervalls. In Satz 13.1 hatten wir gesehen, dass wenn f ein lokales Extremum in x_0 annimmt, dann ist $f'(x_0) = 0$. Andererseits hatten wir auch gesehen, dass aus $f'(x_0) = 0$ nicht notwendigerweise folgt, dass bei x_0 ein lokales Extremum vorliegt.

Der nächste Satz besagt nun, dass wir in vielen Fällen, mithilfe der 2. Ableitung, doch die Aussage treffen können, dass ein lokales Extremum vorliegt. Für die Formulierung des Satzes erinnern wir an die Definition des lokalen Extremums und wir führen eine neue, eng verwandte, Definition ein.

Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $x_0 \in D$.

(1) Wie auf Seite 156 sagen wir, f *nimmt bei x_0 ein lokales Maximum* an, wenn gilt:

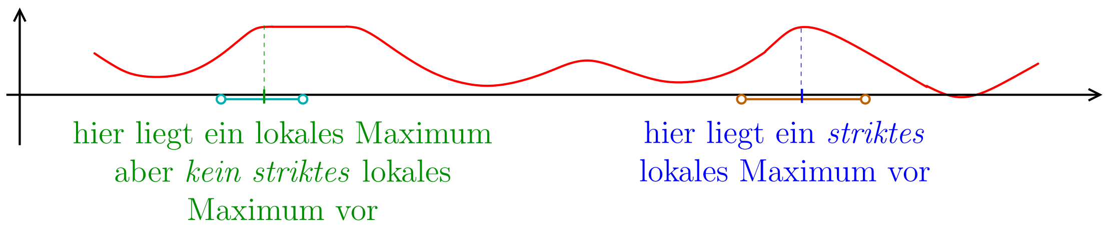
$$\text{es gibt ein } \delta > 0, \text{ so dass } f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in D \text{ mit } x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

(2) Wir sagen, f *nimmt bei x_0 ein striktes lokales Maximum* an, wenn gilt:

$$\text{es gibt ein } \delta > 0, \text{ so dass } f(x_0) > f(x) \text{ für alle } x_0 \neq x \in D \text{ mit } x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

[89] Man kann die Aussage natürlich auch leicht direkt mithilfe des Mittelwertsatzes 13.2 beweisen.

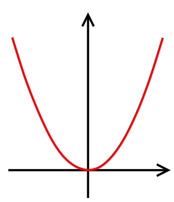
Ganz analog definieren wir den Begriff des *strikten lokalen Minimums.*



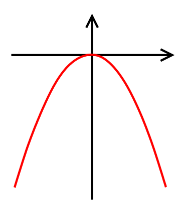
Satz 13.6. *Es sei I ein Intervall und es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche im Inneren des Intervalls* zweifach *differenzierbar ist. Zudem sei $x_0 \in I$ ein Punkt im Inneren des Intervalls.*

(1) *Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann liegt bei x_0 ein striktes lokales Minimum vor.*
(2) *Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, dann liegt bei x_0 ein striktes lokales Maximum vor.*

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2$. Dann ist $f'(x) = 2x$ und $f''(x) = 2$. Also gilt $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 2$, und f nimmt in der Tat in bei $x = 0$ ein lokales Minimum an.



Graph von $f(x) = x^2$
$f'(x) = 2x$, also ist $f'(0) = 0$
$f''(x) = 2$, also ist $f''(0) = 2$



Graph von $f(x) = -x^2$
$f'(x) = -2x$, also ist $f'(0) = 0$
$f''(x) = -2$, also ist $f''(0) = -2$

Beweis. Es sei I ein Intervall und es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche im Inneren des Intervalls *zweifach* differenzierbar ist. Zudem sei $x_0 \in I$ ein Punkt im Inneren des Intervalls.

(1) Wir nehmen nun an, dass $f'(x_0) = 0$, und dass $f''(x_0) > 0$. Es folgt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } f'(x_0)=0}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition von } f''(x_0)}}{=} f''(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Voraussetzung}}}{>} 0.$$

Aus der Definition des Grenzwertes folgt, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass [90]

$$\text{für alle } 0 \neq h \in (-\delta, \delta) \text{ gilt: } \quad \frac{f'(x_0+h)}{h} > 0.$$

Es folgt:

(a) für alle $h \in (-\delta, 0)$ gilt: $\quad f'(x_0+h) < 0,$
(b) für alle $h \in (0, \delta)$ gilt: $\quad f'(x_0+h) > 0.$

---

[90] Ganz allgemein gilt: wenn $\lim\limits_{t\to a} g(x) = b > 0$, dann folgt aus der Definition des Grenzwertes angewandt beispielsweise auf $\epsilon = \frac{b}{3}$, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $g(t) > \frac{2b}{3} > 0$ für alle $t \in (a-\delta, a+\delta)$.

Es folgt nun aus diesen Ungleichungen und dem Monotoniesatz 13.4:

(a) f ist auf dem Intervall $[x_0 - \delta, x_0]$ streng monoton fallend,
(b) f ist auf dem Intervall $[x_0, x_0 + \delta]$ streng monoton steigend.

Dies wiederum impliziert, dass bei x_0 ein striktes lokales Minimum vorliegt.

(2) Diese Aussage wird natürlich ganz analog bewiesen. ■

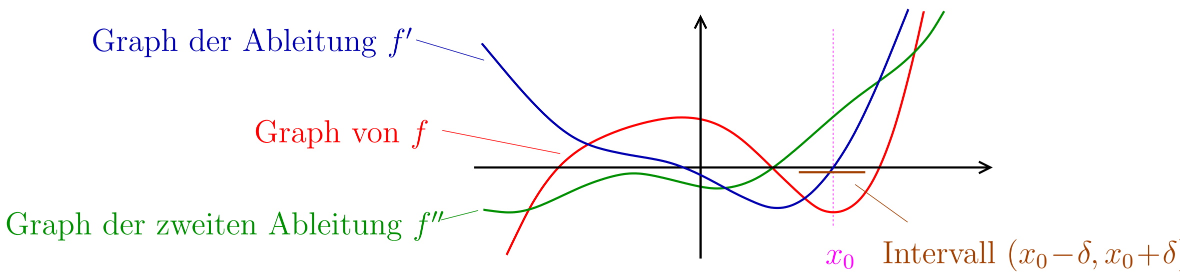


Abbildung 40. Skizze für den Beweis von Satz 13.6.

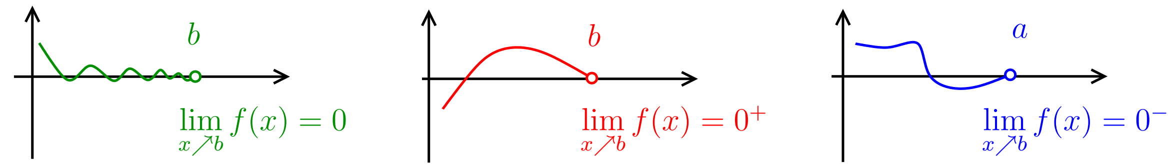
14. Arkusfunktionen und die Regel von l'Hôpital

14.1. **Grenzwerte von Quotienten.** Analog zur Diskussion auf Seite 43 führen wir aber erst einmal folgende Notation ein.

Notation. Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

$$\begin{aligned}\lim_{x\nearrow b} f(x) &= 0^{+} \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{x\nearrow b} f(x)=0 \text{ \& es gibt ein } \delta>0 \text{ so dass } f(x)>0 \text{ für } x\in(b-\delta,b),\\ \lim_{x\nearrow b} f(x) &= 0^{-} \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{x\nearrow b} f(x)=0 \text{ \& es gibt ein } \delta>0 \text{ so dass } f(x)<0 \text{ für } x\in(b-\delta,b).\end{aligned}$$

Wir führen die analoge Definition auch für rechtsseitige Grenzwerte ein.



Notation. Analog zur partiellen Multiplikation auf Seite 42 führen wir nun auf der Menge $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}\cup\{0^{\pm}\}$ folgende partielle Division ein:

$:$	$a<0$	0	$a>0$	$+\infty$	$-\infty$
$b>0$	$\frac{a}{b}$	0	$\frac{a}{b}$	$+\infty$	$-\infty$
0^+	$-\infty$	$*$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$+\infty$	$*$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$b<0$	$\frac{a}{b}$	0	$\frac{a}{b}$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	0	$*$	$*$
$-\infty$	0	0	0	$*$	$*$

Hierbei bedeutet das Symbol "$*$", dass die Division nicht definiert ist.

Wir können nun folgenden Satz formulieren.

Satz 14.1. *Es seien $f,g\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ Funktionen, so dass $g(x)\neq 0$ für alle $x\in(a,b)$, und so dass $\lim\limits_{x\nearrow b} f(x)$ und $\lim\limits_{x\nearrow b} g(x)$ existieren oder bestimmt gegen $\pm\infty$ divergieren. Dann gilt:*

$$\lim_{x\nearrow b}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\nearrow b} f(x)}{\lim\limits_{x\nearrow b} g(x)},$$

wenn *der Quotient auf der rechten Seite in der obigen Tabelle definiert ist. Für linksseitige Grenzwerte gelten natürlich die analogen Aussagen.*

Beweis. Der Beweis ist ganz ähnlich zum Beweis von Satz 3.11 (2) und Satz 3.10. ∎

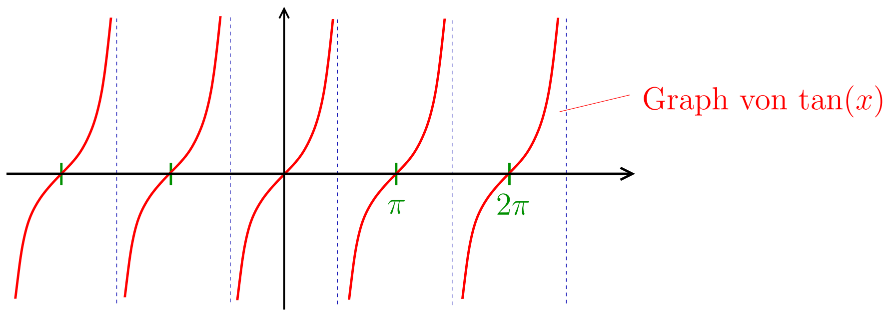
Beispiel. Es ist

$$\lim_{x\nearrow\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

14.2. **Umkehrfunktionen von trigonometrischen Funktionen.**

Definition. Die *Tangensfunktion* ist definiert als die Funktion

$$\begin{aligned} \tan\colon \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + n \cdot \pi \,|\, n \in \mathbb{Z}\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \end{aligned}$$



Lemma 14.2.

(1) *Es ist*
$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}.$$

(2) *Die Einschränkung der Tangensfunktion auf das Intervall* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *ist streng monoton steigend.*

(3) *Es gilt:*
$$\lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty \qquad \textit{und} \qquad \lim_{x \nearrow +\frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty.$$

Beweis.

(1) Es gilt:
$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \underset{\text{Quotientenregel, siehe Satz 12.4}}{=} \frac{\cos(x)\cdot\sin'(x) - \sin(x)\cdot\cos'(x)}{\cos(x)^2} \underset{\text{Satz 12.6}}{=} \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}.$$

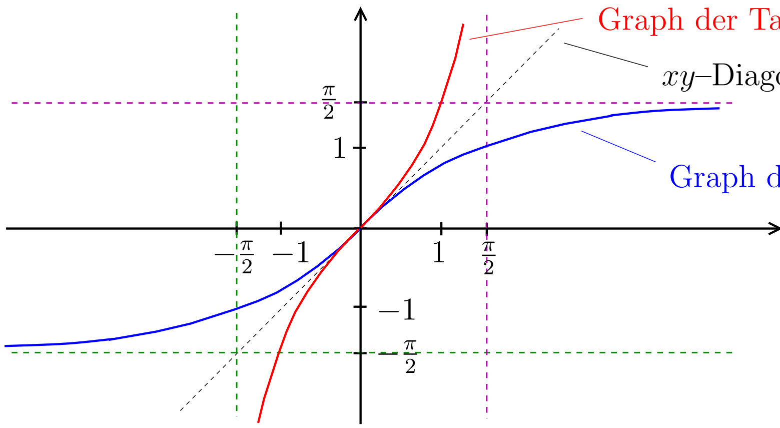
(2) Aus (1) folgt, dass die Ableitung der Tangensfunktion auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ positiv ist. Es folgt aus dem Monotoniesatz 13.4, dass die Einschränkung der Tangensfunktion auf das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton steigend ist.

(3) Aus Satz 14.1 folgt: $\lim_{x \searrow \pm\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \lim_{x \searrow \pm\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\pm 1}{0^+} = \pm\infty.$ ■

Definition. Wir betrachten die Funktion $\tan\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$. Nach Lemma 14.2 (2) ist die Funktion streng monoton und daher nach der Bemerkung auf Seite 115 injektiv. Zudem folgt aus Lemma 14.2 (3) und Lemma 9.2, dass $\tan((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$. Wir bezeichnen die zugehörige Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} \arctan\colon \mathbb{R} &\to (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \\ x &\mapsto \arctan(x) := \tan^{-1}(x) \end{aligned}$$

als die *Arkustangensfunktion*, oder kurz, als den *Arkustangens*.



Lemma 14.3.

(1) *Es ist*
$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
(2) *Die Arkustangensfunktion ist streng monoton steigend.*
(3) *Es ist*
$$\lim_{x\to-\infty}\arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad \textit{und} \qquad \lim_{x\to\infty}\arctan(x) = +\frac{\pi}{2}.$$

Bemerkung. Die Aussage, dass in der Ableitung der Arkustangensfunktion keine trigonometrische Funktion auftaucht, ist überraschend und wird später noch eine sehr wichtige Rolle spielen, wenn wir Stammfunktionen betrachten.

Beweis.

(1) Es gilt:
$$\frac{d}{dx}\arctan(x) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{die Umkehrregel für Ableitungen}\\ \text{besagt: } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}}{=} \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach Lemma 14.2 (1) gilt: } \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}}}{=} \frac{1}{\frac{1}{\cos(\arctan(x))^2}} = \cos(\arctan(x))^2.$$

Wir müssen also noch zeigen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\cos(\arctan(x))^2 = \frac{1}{1+x^2}$. Wir geben zwei Argumente, eines ist sehr kurz und präzise, das andere ist dafür etwas anschaulicher.

(a) Wir führen folgende Berechnung durch:
$$\cos(\arctan(x))^2 \overset{\substack{\text{wir setzen zwischenzeitlich } y := \arctan(x)\\ \downarrow}}{=} \cos(y)^2 = \frac{\cos(y)^2}{\cos(y)^2+\sin(y)^2} \overset{\substack{\text{wir teilen Zähler und Nenner durch } \cos(y)^2\\ \downarrow}}{=} \frac{1}{1+\frac{\sin(y)^2}{\cos(y)^2}} = \frac{1}{1+\tan(y)^2}$$
$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } y = \arctan(x)}}{=} \frac{1}{1+x^2}.$$

(b) Im anschaulichen Argument betrachten wir der Verständlichkeit halber nur den Fall, dass $x \geq 0$. Wir schreiben $\alpha = \arctan(x) \in (0, \frac{\pi}{2})$. In einem rechtwinkligen

Dreieck mit Winkel α wie in Abbildung 41 links gilt, dass

$$\sin(\alpha) \;=\; \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) \;=\; \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Also folgt:

$$\tan(\alpha) \;=\; \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}.$$

In Abbildung 41 rechts betrachten wir jetzt ein rechtwinkliges Dreieck mit Winkel α und Ankathete der Länge 1. Aus $\tan(\alpha) = x$ folgt dann, dass die Länge der Gegenkathete x beträgt. Aus dem Satz von Pythagoras folgt dann, dass die Hypotenuse die Länge $\sqrt{1+x^2}$ besitzt. Zusammengefasst erhalten wir also, dass

$$\cos(\alpha) \;=\; \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Daraus folgt nun aber, dass

$$\cos(\arctan(x))^2 \;=\; \cos(\alpha)^2 \;=\; \tfrac{1}{1+x^2}.$$

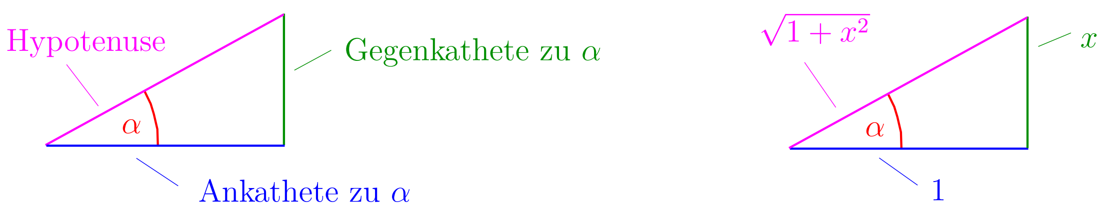


Abbildung 41.

(2) Diese Aussage folgt aus Lemma 14.2 (2) und Lemma 9.5. Alternativ folgt die Aussage aus (1) und aus Satz 13.4.

(3) Diese Aussage folgt leicht aus den Definitionen und Lemma 14.2 (3). Der Beweis dazu ist eine freiwillige Übungsaufgabe. ■

Nachdem die Umkehrfunktion der Tangensfunktion soviel Freude bereitet hat, betrachten wir nun auch noch Umkehrfunktionen der Sinus- und Kosinusfunktion.

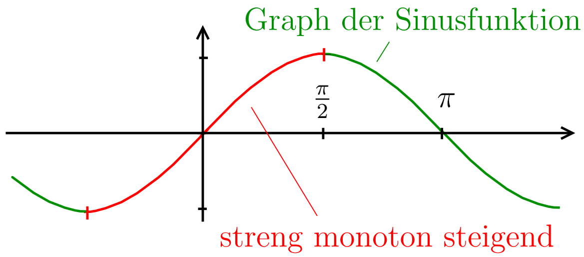
Definition. Wir betrachten die Einschränkung der Sinusfunktion auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Nachdem $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) > 0$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ folgt aus Satz 13.4, dass die Sinusfunktion auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton steigend ist. Die dazugehörige Umkehrfunktion

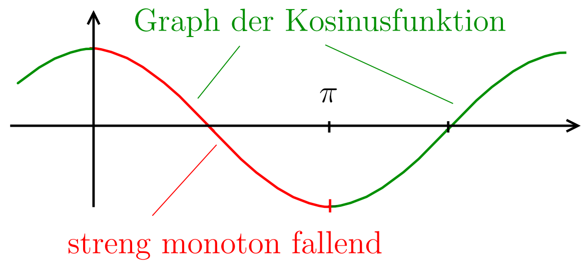
$$\arcsin\colon [-1,1] \;\to\; [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

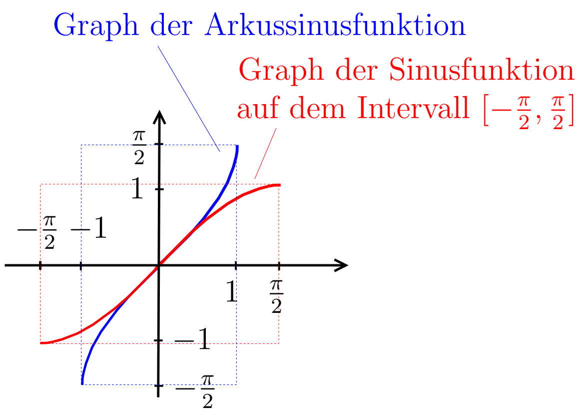
wird die *Arkussinusfunktion* genannt. Ganz analog kann man zeigen, dass die Einschränkung der Kosinusfunktion auf das Intervall $[0,\pi]$ streng monoton fallend ist. Die dazugehörige Umkehrfunktion

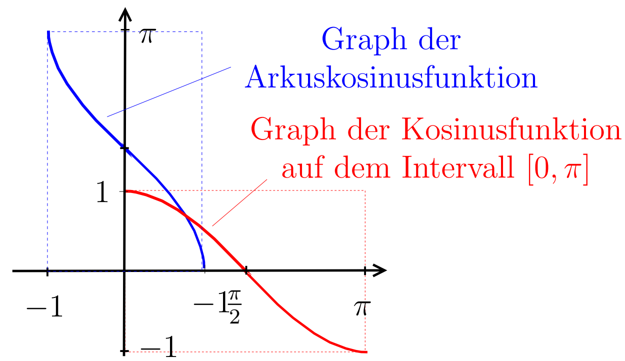
$$\arccos\colon [-1,1] \;\to\; [0,\pi]$$

wird die *Arkuskosinusfunktion* genannt.









Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Lemma, welches in Präsenzübungsblatt 10 bewiesen wird.

Lemma 14.4. *Die Arkussinusfunktion und die Arkuskosinusfunktion sind auf dem Intervall $(-1,1)$ differenzierbar. Zudem gilt auf dem Intervall $(-1,1)$:*

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \textit{und} \qquad \frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Auch in diesem Fall sehen wir also, dass die Ableitungen nicht durch trigonometrische Funktionen gegeben sind.

14.3. **Die Regel von l'Hôpital.** In Satz 14.1 hatten wir Grenzwerte der Form $\lim\limits_{x\searrow a}\frac{f(x)}{g(x)}$ betrachtet. Der Satz 14.1 macht jedoch keine Aussage für folgende zwei Fälle:

$$(1) \quad \lim_{x\searrow a} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x\searrow a} g(x) = 0 \qquad (2) \quad \lim_{x\searrow a} f(x) = \pm\infty \text{ und } \lim_{x\searrow a} g(x) = \pm\infty.$$

Die Regel von l'Hôpital erlaubt es zum Glück, viele von solchen Grenzwerten zu bestimmen.

Satz 14.5. (Regel von l'Hôpital) *Es seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, so dass $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Wenn einer der folgenden beiden Fälle eintritt:*

$$(1) \quad \lim_{x\searrow a} f(x) = 0 \textit{ und } \lim_{x\searrow a} g(x) = 0 \qquad (2) \quad \lim_{x\searrow a} f(x) = \pm\infty \textit{ und } \lim_{x\searrow a} g(x) = \pm\infty,$$

dann gilt
$$\lim_{x\searrow a}\frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \lim_{x\searrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{\infty\},$$
wenn *der Grenzwert auf der rechten Seite existiert oder bestimmt gegen* $\pm\infty$ *divergiert. Die Regel von l'Hôpital gilt ganz analog auch für rechtsseitige Grenzwerte und für beidseitige Grenzwerte.*

Beispiel. Es gilt:
$$\lim_{x\searrow 0}\frac{\sqrt{x}}{\sin(x)} \underset{\uparrow}{\overset{\frac{0}{0}\, l'H}{=\!=}} \lim_{x\searrow 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos(x)} \;=\; \lim_{x\searrow 0}\frac{1}{2\sqrt{x}\cos(x)} \;=\; \frac{1}{0^+} \;=\; +\infty.$$
wir zeigen mit "$\frac{0}{0}$" an, dass die Grenzwerte der Funktionen im Nenner jeweils 0 sind, und wir zeigen mit "$\overset{l'H}{=}$" an, dass wir die Regel von l'Hôpital anwenden

Bei manchen Gelegenheiten muss man die Funktion erst umschreiben, bevor man die Regel von l'Hôpital anwenden kann. Beispielsweise gilt:
$$\lim_{x\searrow 0}\big(x\cdot\ln(x)\big) \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\searrow 0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}\, l'H}{=\!=} \lim_{x\searrow 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \overset{\text{Vereinfachen des Bruchs}}{\overset{\downarrow}{=}} \lim_{x\searrow 0}(-x) \;=\; 0.$$
der Grenzwert ist von der Form $0\cdot\infty$, wir schreiben die Funktion als Bruch um, so dass wir die Regel von l'Hôpital anwenden können

Zudem gilt:
$$\lim_{x\searrow 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right) \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\searrow 0}\frac{\sin(x)-x}{x\cdot\sin(x)} \overset{l'H}{=} \lim_{x\searrow 0}\frac{\cos(x)-1}{x\cdot\cos(x)+\sin(x)} \overset{l'H}{=} \lim_{x\searrow 0}\frac{-\sin(x)}{-x\cdot\sin(x)+2\cdot\cos(x)} \;=\; 0.$$
der Grenzwert ist von der Form $\infty-\infty$, wir schreiben die Funktion wiederum als Bruch um

Für den Beweis der Regel von l'Hôpital benötigen wir folgenden Satz.

Satz 14.6. (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Es seien* $f, g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ *zwei differenzierbare Funktionen. Wenn* $g'(x)\neq 0$ *für alle* $x\in(a,b)$ *und wenn* $g(a)\neq g(b)$, *dann existiert ein* $\xi\in(a,b)$ *mit*
$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \;=\; \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Bemerkung. Wenn $g(x)=x$, dann erhalten wir gerade die Aussage vom üblichen Mittelwertsatz 13.2 der Differentialrechnung.

Beweis des Verallgemeinertern Mittelwertsatzes der Differentialrechnung.

Wie wir gerade gesehen haben, ist der Satz eine Verallgemeinerung vom Mittelwertsatz 13.2, welchen wir mithilfe des Satzes von Rolle 13.3 bewiesen hatten. Auch den jetzigen Satz können wir mit fast dem gleichen Trick auf den Satz von Rolle zurück führen.

Wir betrachten die Funktion, welche definiert ist durch
$$\varphi(x) \;:=\; f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot\big(g(x)-g(a)\big).$$

Es gilt $\varphi(a) = f(a)$ und $\varphi(b) = f(a)$. Wir können also den Satz 13.3 von Rolle auf die differenzierbare Funktion φ anwenden und erhalten ein $\xi \in (a,b)$, so dass $\varphi'(\xi) = 0$. Dann gilt

$$0 \;=\; \varphi'(\xi) \;=\; f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(\xi).$$

Nach Voraussetzung gilt $g'(\xi) \neq 0$. Wir erhalten also, wie gewünscht, dass

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \;=\; \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

■

Beweis der Regel von l'Hôpital. Wir betrachten nur folgenden Spezialfall der Regel von l'Hôpital: Es seien $f, g\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, welche auf (a,∞) differenzierbar sind, so dass $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,\infty)$ und so dass gilt:[91]

(1) $f(a) = g(a) = 0$,

(2) der Grenzwert $\lim\limits_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ist reelle Zahl.

Alle anderen Fälle der Regel von l'Hôpital werden in [F, Kapitel 16] bewiesen.

Wir erinnern zuerst daran, dass für jede Funktion $h\colon (a,\infty) \to \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$ per Definition gilt:

$$\lim_{x\searrow a} h(x) = d \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in(a,a+\delta)}{\forall} |h(x)-d| < \epsilon.$$

Nach Voraussetzung (2) existiert der Grenzwert

$$d \;:=\; \lim_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \qquad \text{und wir müssen zeigen, dass} \qquad \lim_{x\searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \;=\; d.$$

Es sei also $\epsilon > 0$. Nachdem $\lim_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = d$ folgt aus der obigen Definition des rechtsseitigen Grenzwert, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$(*) \qquad \text{für alle } \xi \in (a, a+\delta) \text{ gilt:} \qquad \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - d \right| \;<\; \epsilon.$$

Es genügt nun folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung.

$$\text{für alle } x \in (a, a+\delta) \text{ gilt:} \qquad \left| \frac{f(x)}{g(x)} - d \right| \;<\; \epsilon.$$

Es sei also $x \in (a, a+\delta)$. Dann gilt:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - d \right| \;\overset{\substack{\text{nach Voraussetzung (1) gilt } f(a)=g(a)=0\\ \downarrow}}{=}\; \left| \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} - d \right| \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{der verallgemeinerte Mittelwertsatz besagt, dass es ein } \xi\in(a,x)\\ \text{gibt, so dass diese Gleichheit gilt}}}{=}\; \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - d \right| \;\overset{\substack{\text{folgt aus } (*), \text{ da } \xi\in(a,x)\subset(a,a+\delta)\\ \downarrow}}{<}\; \epsilon.$$

■

Der folgende Satz besagt nun, dass die Regel von l'Hôpital anstatt für Grenzwerte $x \to a$ auch für Grenzwerte $x \to \pm\infty$ angewandt werden kann.

[91] Die Voraussetzungen sind beispielsweise erfüllt für $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x}$.

Satz 14.7. (Regel von l'Hôpital) *Es seien $f, g\colon (a,\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, so dass $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,\infty)$. Wenn einer der folgenden beiden Fälle eintritt:*

$$(1)\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \qquad (2)\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \text{ und } \lim_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty,$$

dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\},$$

wenn *der Grenzwert auf der rechten Seite existiert oder bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert. Genau die gleiche Aussage gilt auch für den Grenzwert $x \to -\infty$.*

Beispiel.

(1) Für jedes $\alpha > 0$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regel 14.7 von l'Hôpital}}}{\overset{l'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\ln(x)}{\frac{d}{dx}x^\alpha} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Korollar 12.10 und Korollar 12.11}}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha \cdot x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{x^\alpha} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } \alpha>0}}{=} 0.$$

Das heißt für $x \to \infty$ wächst die Logarithmusfunktion $\ln(x)$ "langsamer" als jede positive Potenz von x.

(2) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} \overset{l'H}{=} \dots \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1} = +\infty.$$

Man kann dieses Argument noch etwas verallgemeinern und wir sehen, dass für alle $a > 1$ und $d \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^d} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wir setzen } n := \max\{\lceil d\rceil, 0\} \text{ und wir wenden} \\ \text{die Regel von l'Hôpital } n\text{-Mal an}}}{\overset{l'H}{=}} \dots \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(a)^n \cdot a^x}{d(d-1)\cdots(d+n-1)\cdot x^{d-n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(a)^n \cdot a^x}{d(d-1)\cdots(d-n+1)} \cdot x^{n-d} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } a>1 \text{ und } n-d\geq 0}}{=} \infty.$$

Das heißt für $x \to \infty$ wächst jede Exponentialfunktion a^x mit $a > 1$ "schneller" als jede Potenzfunktion x^d.

Im Beweis von Satz 14.7 werden wir folgendes Lemma verwenden.

Lemma 14.8. *Es sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\searrow 0} f\left(\tfrac{1}{x}\right) = a.$$

Die gleiche Aussage gilt auch für bestimmte Divergenz gegen $\pm\infty$.

Beweis von Lemma 14.8. Die Aussage folgt eigentlich sofort aus den Definitionen der beiden Grenzwerte links und rechts, welche wir auf den Seiten 102 und 104 eingeführt hatten. ∎

Wir wenden uns jetzt dem Beweis von Satz 14.7 zu.

Beweis von Satz 14.7.

Der Gedanke ist natürlich, dass wir die Aussage von Satz 14.7 mithilfe von Lemma 14.8 auf Satz 14.5 zurückführen wollen.

Wir setzen $k(x) := f(\frac{1}{x})$ und $l(x) := g(\frac{1}{x})$. Wir erhalten:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\substack{\text{Lemma 14.8}\\ \downarrow}}{=} \lim_{x\searrow 0}\frac{k(x)}{l(x)} \overset{\substack{\text{gilt nach der ursprünglichen Regel von l'Hôpital, also Satz 14.5,}\\ \text{wenn wir zeigen können, dass der Grenzwert rechts in } \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \text{ existiert}\\ \downarrow}}{=} \lim_{x\searrow 0}\frac{k'(x)}{l'(x)}$$

$$= \lim_{x\searrow 0}\frac{\frac{d}{dx}f(\frac{1}{x})}{\frac{d}{dx}g(\frac{1}{x})} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Kettenregel}}}{=} \lim_{x\searrow 0}\frac{f'(\frac{1}{x})\cdot\frac{-1}{x^2}}{g'(\frac{1}{x})\cdot\frac{-1}{x^2}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Kürzen}}}{=} \lim_{x\searrow 0}\frac{f'(\frac{1}{x})}{g'(\frac{1}{x})} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Lemma 14.8}}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Nach Voraussetzung existiert der Grenzwert rechts in $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Wir hatten also die Regel 14.5 von l'Hôpital legitim verwendet. ■

Wir haben jetzt den Begriff Grenzwertbegriff $\to\infty$ zweimal eingeführt, einmal für Folgen, und einmal für Funktionen. Hierbei herrscht folgender Zusammenhang:

Lemma 14.9. *Es sei $f\colon (0,\infty)\to\mathbb{R}$ eine Funktion. Für $a\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ gilt:*

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty} f(x)}_{\substack{\text{Grenzwert der Funktion}\\ f\colon (0,\infty)\to\mathbb{R}}} = a \quad\Longrightarrow\quad \underbrace{\lim_{n\to\infty} f(n)}_{\substack{\text{Grenzwert der Folge}\\ (f(n))_{n\in\mathbb{N}}}} = a.$$

Beweis. Der Satz folgt sofort aus den Definitionen, welche wir auf den Seiten 32 und 104 eingeführt hatten. ■

Beispiel. Wir betrachten die Folge $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ mit $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt:[92]

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Definition von Potenzen, siehe Seite 122}}}{=} \lim_{x\to\infty}\exp\left(\ln(1+\tfrac{1}{n})\cdot n\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus Satz 7.4, da exp stetig}}}{=} \exp\left(\lim_{n\to\infty}\ln(1+\tfrac{1}{n})\cdot n\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Lemma 14.9}}}{=} \exp\left(\lim_{x\to\infty}\ln(1+\tfrac{1}{x})\cdot x\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Regel 14.7 von l'Hôpital}}}{\overset{l'H}{=}} \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty}\tfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) = \exp(1) = e.$$

Wir sehen also, dass wir mithilfe von Ableitungen und der Regel von l'Hôpital Grenzwerte von Folgen von reellen Zahlen bestimmen können, welche ansonsten zumindest sehr schwer zu berechnen wären.

---

[92] Manchmal wird die Gleichheit $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ auch als Definition der Eulerschen Zahl verwendet.

Beispiel. Die Umkehrung von Lemma 14.9 nicht. Wenn wir beispielsweise die Funktion $f(x) = \sin(\pi x)$ betrachten, dann gilt für den "Folgengrenzwert", dass

$$\lim_{n\to\infty} f(n) \;=\; \lim_{n\to\infty} \sin(\pi n) \;=\; \lim_{n\to\infty} 0 \;=\; 0,$$

aber der "Funktionengrenzwert" $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert nicht.

15. Das Riemann-Integral

15.1. **Definition des Riemann-Integrals.**

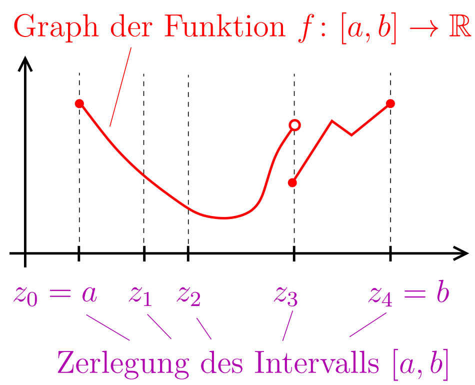
Definition. Eine *Zerlegung Z von einem Intervall* $[a,b]$ ist eine Menge $Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ von reellen Zahlen, so dass

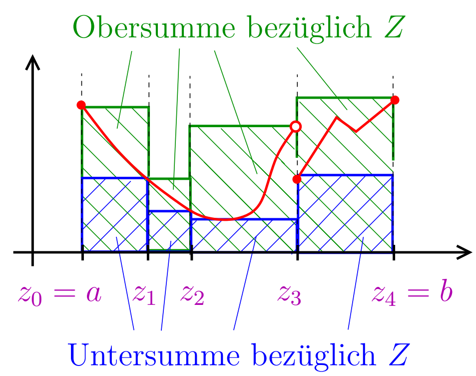
$$a = z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_{n-1} < z_n = b.$$

Sei nun $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir definieren

$$\begin{array}{rrcll} \text{die Untersumme} & U(f,Z) & := & \sum\limits_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \cdot \inf f([z_k, z_{k+1}]) & \text{und} \\ \text{die Obersumme} & O(f,Z) & := & \sum\limits_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \cdot \sup f([z_k, z_{k+1}]) & \end{array}$$

von f bezüglich der Zerlegung Z.





Beispiel. Wir betrachten die Funktion
$$\begin{array}{rcl} f\colon [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x. \end{array}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ die Zerlegung von $[0,1]$ in n Intervalle der Länge $\frac{1}{n}$. Dann gilt:

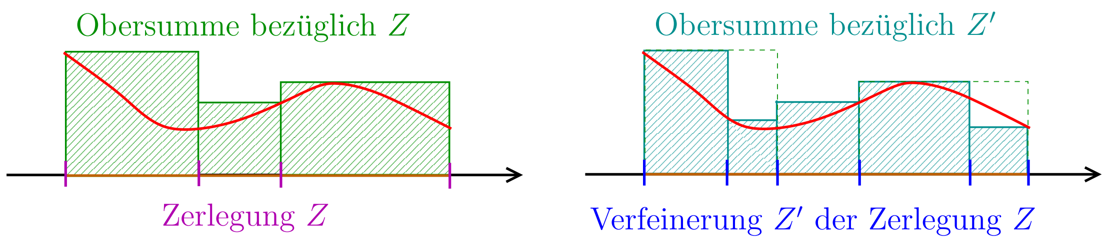
$$\begin{array}{rclclclcl} U(f,Z_n) & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)}_{=\frac{1}{n}} \cdot \underbrace{\inf f\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right)}_{=\frac{k}{n}} & = & \frac{1}{n^2} \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} k & \overset{\uparrow}{=} & \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} & = & \frac{n-1}{2n}. \\ & & & & & \text{Lemma 2.3} & & & \\ O(f,Z_n) & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)}_{=\frac{1}{n}} \cdot \underbrace{\sup f\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right)}_{=\frac{k+1}{n}} & = & \frac{1}{n^2} \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} (k+1) & \underset{\downarrow}{=} & \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} & = & \frac{n+1}{2n}. \end{array}$$

Definition. Es sei Z eine Zerlegung von $[a,b]$. Eine *Verfeinerung der Zerlegung Z* ist eine Zerlegung, welche wir aus Z durch Zufügen von endlich vielen Punkten in $[a,b]$ erhalten.

Wir fassen im folgenden Lemma einige grundlegende Eigenschaften von Untersummen und Obersummen zusammen.

Lemma 15.1. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.*

(1) *Wenn Z' eine Verfeinerung einer Zerlegung Z ist, dann gilt*
$$U(f,Z) \le U(f,Z') \qquad \text{und} \qquad O(f,Z') \le O(f,Z).$$
(2) *Es seien Z, Z' zwei Zerlegungen von $[a,b]$, dann gilt*
$$U(f,Z') \le O(f,Z).$$
(3) $\sup\{U(f,Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \le \inf\{O(f,Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$.[93]



Beweis. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

(1) Wir erhalten eine Verfeinerung in dem wir zu einer Zerlegung endlich viele Punkte hinzufügen. Indem wir diese der Reihe nach hinzufügen sehen wir, dass es genügt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Es sei $Z = \{z_0, \dots, z_n\}$ eine Zerlegung und w ein weiterer Punkt in $[a,b]$. Dann gilt $U(f,Z) \le U(f, Z \cup \{w\})$ und $O(f, Z\cup\{w\}) \le O(f,Z)$.

Es ist $w \in [a,b]$. Also existiert ein $i \in \{0,\dots,n-1\}$, so dass $w \in [z_i, z_{i+1}]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
U(f, Z\cup\{w\}) - U(f,Z) &\overset{\substack{\text{alle anderen Terme in den Untersummen heben sich weg}\\ \downarrow}}{=} \\
&= (w - z_i)\cdot \underbrace{\inf f([w,z_i])}_{\ge \inf f([z_i,z_{i+1}])} + (z_{i+1} - w)\cdot \underbrace{\inf f([z_{i+1},w])}_{\ge \inf f([z_i,z_{i+1}])} - (z_{i+1}-z_i)\cdot \inf f([z_i,z_{i+1}]) \\
&\ge \underbrace{\big((w-z_i) + (z_{i+1}-w) - (z_{i+1}-z_i)\big)}_{=0} \cdot \inf f([z_i,z_{i+1}]) \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist also $U(f,Z) \le U(f, Z\cup\{w\})$. Mit fast dem gleichen Argument zeigt man, dass $O(f, Z\cup\{w\}) \le O(f,Z)$.

(2) (a) Nehmen wir zuerst an, dass $Z = Z'$. Nachdem für eine beliebige beschränkte nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ gilt, dass $\inf(M) \le \sup(M)$, folgt sofort aus den Definitionen, dass $U(f,Z) \le O(f,Z)$.

[93] Die Menge $\{U(f,Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$ ist also die Menge aller Untersummen, welche bezüglich beliebigen Zerlegungen auftreten. Aus $a \le b$ folgt, dass diese Menge der Untersummen nichtleer ist und aus (2) folgt, dass diese Menge nach oben beschränkt. Nach Satz 5.2 existiert daher das Supremum dieser Menge.

(b) Es seien nun Z, Z' zwei beliebige Zerlegungen von $[a,b]$. Dann gilt:[94]

$$U(f,Z') \underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus (1)}}}{\leq} U(f, Z\cup Z') \underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus (a)}}}{\leq} O(f, Z\cup Z') \underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus (1)}}}{\leq} O(f,Z).$$

(3) Diese Aussage folgt aus (2) und aus der Definition von Supremum und Infimum. ■

Im Folgenden sagen wir nun, dass eine Funktion f *Riemann-integrierbar* ist, wenn die Gleichheit in Lemma 15.1 (3) gilt. Genauer gesagt haben wir folgende Definition.

Definition. Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar*, wenn

$$\sup\{U(f,Z)\,|\,Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \;=\; \inf\{O(f,Z)\,|\,Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}.$$

Wenn f Riemann-integrierbar ist, dann nennen wir diesen gemeinsamen Wert das *Riemann-Integral über f von a nach b*, und wir schreiben

$$\int_a^b f(x)\,dx \;:=\; \underbrace{\inf\{O(f,Z)\,|\; Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}}_{=\sup\{U(f,Z)\,|\; Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}}.$$

Bemerkung. Wir sagen in Zukunft oft auch "integrierbar" anstatt "Riemann-integrierbar" und "Integral" anstatt "Riemann-Integral". Wenn f Riemann-integrierbar ist, dann sagen wir auch, dass das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ existiert.[95]

Beispiel. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine konstante Funktion, das heißt es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = c$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt für jede Zerlegung $Z = \{z_0, \ldots, z_n\}$ von $[a,b]$, dass

$$U(f,Z) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1}-z_k)\cdot \underbrace{\inf f([z_k, z_{k+1}])}_{=\,c,\text{ da } f \text{ konstant}} \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1}-z_k)\cdot c \underset{\substack{\uparrow\\ \text{alle anderen Terme heben sich weg}}}{=} c\cdot(z_n - z_0) = c\cdot(b-a).$$

Genauso zeigt man auch, dass $O(f,Z) = c\cdot(b-a)$. Wir haben also gezeigt, dass f Riemann-integrierbar ist, und dass

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; c\cdot(b-a).$$

Beispiel. Wir betrachten die Dirichlet-Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [1,5] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}\cap[1,5] \\ 2, & \text{andernfalls.} \end{cases} \end{aligned}$$

[94] Hier verwenden wir, dass für zwei Zerlegungen eines Intervalls $[a,b]$ auch die Vereinigung $Z \cup Z'$ eine Zerlegung ist, und diese ist eine Verfeinerung sowohl von Z als auch von Z'.

[95] Wenn wir schreiben "Riemann-integrierbar", dann stellt sich die Frage, ob es denn noch andere Definitionen von "Integrierbarkeit" gibt, außer der Riemann-Integrierbarkeit. Dies ist in der Tat der Fall, in Analysis III werden wir das Lebesgue-Integral kennenlernen, welches viel allgemeiner (und auch deutlich komplizierter) ist.

Es sei $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ eine beliebige Zerlegung des Intervalls $[1,5]$. Dann gilt

$$U(f,Z) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1}-z_k)\cdot \underbrace{\inf f([z_k,z_{k+1}])}_{\substack{=0,\text{ weil } [z_k,z_{k+1}] \text{ nach}\\ \text{der Bemerkung auf Seite 56}\\ \text{rationale Zahlen enthält}}} \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1}-z_k)\cdot 0 \;=\; 0$$

$$O(f,Z) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1}-z_k)\cdot \underbrace{\sup f([z_k,z_{k+1}])}_{\substack{=2,\text{ weil } [z_k,z_{k+1}] \text{ nach}\\ \text{der Bemerkung auf Seite 61}\\ \text{irrationale Zahlen enthält}}} \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1}-z_k)\cdot 2 \;=\; (5-1)\cdot 2 \;=\; 8.$$

Die Funktion f ist also *nicht Riemann-integrierbar.* [96]

Der folgende Satz erlaubt es, die Integrabilität einer Funktion zu zeigen, ohne direkt mit Infimum und Supremum zu arbeiten.

Satz 15.2. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Es gilt:*

$$f \text{ ist integrierbar} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{array}{c}\text{es gibt eine Folge von Zerlegungen } (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ \text{von } [a,b], \text{ so dass } \lim\limits_{n\to\infty} U(f,Z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} O(f,Z_n).\end{array}$$

Zudem gilt: wenn solch eine Folge von Zerlegungen vorliegt, dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} U(f,Z_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} O(f,Z_n).$$

Beweis. Wir beweisen zuerst die "$\Rightarrow$"-Richtung. Wir nehmen also an, dass die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist. Wir setzen $I := \int_a^b f(x)\,dx$. Per Definition gilt

$$\sup\{U(f,Z)\,|\,Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \;=\; I \;=\; \inf\{O(f,Z)\,|\,Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}.$$

Nach Satz 5.3 existieren also Folgen von Zerlegungen $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(W'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} U(f,W_n) \;=\; I \;=\; \lim_{n\to\infty} O(f,W'_n).$$

Dann gilt

$$I \;=\; \lim_{n\to\infty} U(f,W_n) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Lemma 15.1 (1)}}}{\leq} \lim_{n\to\infty} U(f,W_n\cup W'_n) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Lemma 15.1 (2)}}}{\leq} \lim_{n\to\infty} O(f,W_n\cup W'_n) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Lemma 15.1 (1)}}}{\leq} \lim_{n\to\infty} O(f,W'_n) \;=\; I.$$

Dann gilt Nachdem der erste Ausdruck gleich dem letzten Ausdruck ist, müssen alle Ungleichheiten also schon Gleichheiten sein. Die Folge von Zerlegungen $(W_n\cup W'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat also die gewünschte Eigenschaft.

Wir beweisen nun die "$\Leftarrow$"-Richtung. Wir nehmen nun also an, es gibt eine Folge von Zerlegungen Z_n von $[a,b]$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} U(f,Z_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} O(f,Z_n).$$

[96] In Analysis III werden wir sehen, dass f Lebesgue-integrierbar ist mit Lebesgue-Integral $4\cdot 2 = 8$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} U(f,Z_n) \ &\overset{\substack{\text{folgt aus der Definition des Supremums und Satz 3.6}\\ \downarrow}}{\leq} \ \sup\{U(f,W)\,|\,W \text{ Zerlegung von } [a,b]\}\\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{weil nach Lemma 15.1 (1) immer gilt } U(f,W)\leq O(f,Z)}}{\leq} \ \inf\{O(f,Z)\,|\,Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Definition des Infimums.}}}{\leq} \ \lim_{n\to\infty} O(f,Z_n).\end{aligned}$$

Wir haben angenommen, dass der erste Ausdruck gleich dem letzten Ausdruck ist. Wir sehen also wiederum, dass alle Ungleichheiten schon Gleichheiten sind. Insbesondere ist f integrierbar. Zudem folgt aus den Gleichheiten, dass das Integral in der Tat der Grenzwert der Untersummen $U(f,Z_n)$ und der Obersummen $O(f,Z_n)$ ist. ■

Beispiel.

(1) Wir betrachten wiederum die Funktion $\begin{aligned} f\colon [0,1] &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto x,\end{aligned}$

zusammen mit der Folge von Zerlegungen $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$, $n\in\mathbb{N}$. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} U(f,Z_n) \ \underset{\uparrow}{=} \ \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n} \ = \ \frac{1}{2} \ = \ \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} \ \underset{\uparrow}{=} \ \lim_{n\to\infty} O(f,Z_n).$$

auf Seite 174 hatten wir gezeigt, dass $U(f,Z_n)=\frac{n-1}{2n}$ und $O(f,Z_n)=\frac{n+1}{2n}$

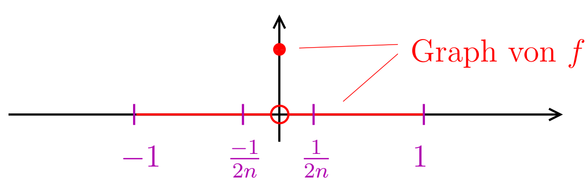
Es folgt also aus Satz 15.2, dass $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

(2) Wir betrachten die Funktion $\begin{aligned} f\colon [-1,1] &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } x\neq 0,\\ \frac{1}{3}, & \text{wenn } x = 0,\end{cases}\end{aligned}$

zusammen mit der unten skizzierten Folge von Zerlegungen $Z_n := \{-1, -\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, 1\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} U(f,Z_n) &= 0,\\ O(f,Z_n) &= \tfrac{1}{3}\cdot\left(\tfrac{1}{2n}-\left(-\tfrac{1}{2n}\right)\right) = \tfrac{1}{3n}.\end{aligned}$$

Die Grenzwerte dieser Folgen von Untersummen und Obersummen sind jeweils 0. Es folgt also aus Satz 15.2, dass f integrierbar ist mit $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 0$.



15.2. **Eigenschaften des Riemann-Integrals.** In diesem Kapitel wollen wir einige grundlegende Eigenschaften des Riemann-Integrals beweisen.

Satz 15.3. *Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f+g$ und $\lambda \cdot f$ integrierbar und es gilt*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)+g(x)\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\\ \int_a^b \lambda\cdot f(x)\,dx &= \lambda\cdot\int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Beweis $(*)$. Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Wir müssen zeigen, dass $f+g$ integrierbar ist mit

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Nach Satz 15.2 existieren Folgen von Zerlegungen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $[a,b]$, so dass

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} U(f,X_n) &= \lim_{n\to\infty} O(f,X_n) &&= \int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{und}\\ \lim_{n\to\infty} U(g,Y_n) &= \lim_{n\to\infty} U(g,Y_n)) &&= \int_a^b g(x)\,dx.\end{aligned}$$

Nach Satz 15.2 genügt es nun zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} U(f+g, X_n\cup Y_n) = \lim_{n\to\infty} O(f+g, X_n\cup Y_n) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Für den Beweis dieser Aussage benötigen wir folgende Behauptung.

Behauptung. Für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ gilt:

$$\begin{aligned} U(f,Z)+U(g,Z) &\le U(f+g,Z)\\ \text{und es gilt:}\qquad O(f+g,Z) &\le O(f,Z)+O(g,Z).\end{aligned}$$

Wir beweisen die Aussage für die Untersummen. Die Aussage für die Obersummen wird dann ganz analog bewiesen. Es folgt sofort aus den Definitionen, dass es genügt zu zeigen, dass für jedes Intervall $[c,d]$ folgende Ungleichung gilt:

$$\inf\big(f([c,d])\big) + \inf\big(g([c,d])\big) \le \inf\big((f+g)([c,d])\big).$$

Aus der Definition von $\inf((f+g)([c,d]))$ folgt, dass es genügt zu zeigen, dass

$$\inf\big(f([c,d])\big) + \inf\big(g([c,d])\big) \le (f+g)(x) \qquad \text{für alle } x\in[c,d].$$

Es gilt aber in der Tat für ein beliebiges $x \in [c,d]$, dass

$$\inf\big(f([c,d])\big) + \inf\big(g([c,d])\big) \underset{\uparrow}{\le} f(x)+g(x) = (f+g)(x).$$

aus der Definition des Infimums folgt $\inf(f([c,d])) \le f(x)$ und $\inf(g([c,d])) \le g(x)$

⊞

Mithilfe der Behauptung können wir nun zeigen, dass folgende Ungleichungen gelten:

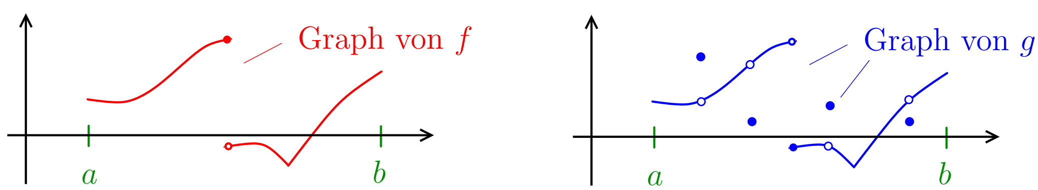
$$\begin{array}{rcll}
\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx & = & \lim\limits_{n\to\infty} U(f, X_n) + \lim\limits_{n\to\infty} U(g, Y_n) & \\
& \leq & \lim\limits_{n\to\infty} U(f, X_n \cup Y_n) + \lim\limits_{n\to\infty} U(g, X_n \cup Y_n) & \text{nach Lemma 15.1 (1)} \\
& \leq & \lim\limits_{n\to\infty} U(f+g, X_n \cup Y_n) & \text{nach der Behauptung} \\
& \leq & \lim\limits_{n\to\infty} O(f+g, X_n \cup Y_n) & \text{nach Lemma 15.1 (2)} \\
& \leq & \lim\limits_{n\to\infty} O(f, X_n \cup Y_n) + \lim\limits_{n\to\infty} O(g, X_n \cup Y_n) & \text{nach der Behauptung} \\
& \leq & \lim\limits_{n\to\infty} O(f, X_n) + \lim\limits_{n\to\infty} O(g, Y_n) & \text{nach Lemma 15.1 (1)} \\
& = & \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x). &
\end{array}$$

Dies ist jedoch nur möglich, wenn alle Ungleichheiten schon Gleichheiten sind. Wir haben damit also die gewünschte Aussage bezüglich $f+g$ bewiesen.

Es sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Aussage für $\lambda \cdot f$ wird mit ähnlichen Methoden wie oben bewiesen. Die Ausführung dieses Beweises verbleibt als freiwillige Übungsaufgabe. ■

Korollar 15.4. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Wenn $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist, welche sich von f nur in endlich vielen Punkten unterscheidet, dann ist g ebenfalls integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b g(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx.$$



Beweis. Es seien $t_1, \dots, t_n$ die Punkte im Intervall $[a,b]$ an denen sich f und g unterscheiden. Dann gilt

$$g \;=\; f + (g-f) \;=\; f \;+\; \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\text{Funktion, welche überall, außer bei } t_i\text{, null ist.}}_{\substack{\text{das Beispiel auf Seite 178 zeigt, dass eine} \\ \text{solche Funktion integrierbar ist mit Integral} = 0}}$$

Das Korollar folgt nun aus dieser Beobachtung und Satz 15.3. ■

Lemma 15.5. (Monotonieeigenschaft des Integrals) *Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei integrierbare Funktionen, so dass $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Dann ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; \int_a^b g(x)\,dx.$$

Beweis. Für jedes Intervall $[c,d]$ in $[a,b]$ gilt, dass

$$\inf\big(f([c,d])\big) \;\leq\; \inf\big(g([c,d])\big).$$

Also gilt auch für alle Zerlegungen Z von $[a,b]$, dass

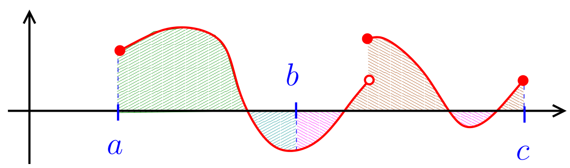
$$U(f,Z) \;\leq\; U(g,Z).$$

Das Lemma folgt nun leicht aus dieser Beobachtung. ■

Lemma 15.6. *Es sei $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und es sei $a<b<c$. Dann gilt*

$$\int_a^c f(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;+\; \int_b^c f(x)\,dx,$$

wenn die beiden Integrale auf der rechten Seite existieren.



Beweis $(*)$. Nach Satz 15.2 existieren Folgen von Zerlegungen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $[a,b]$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $[b,c]$ gibt, so dass

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} U(f,X_n) \;&=\; \lim_{n\to\infty} O(f,X_n) \;=\; \int_a^b f(x)\,dx,\\ \lim_{n\to\infty} U(f,Y_n) \;&=\; \lim_{n\to\infty} O(f,Y_n) \;=\; \int_b^c f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Für eine beliebige Zerlegung X von $[a,b]$ und eine beliebige Zerlegung Y von $[b,c]$ ist $X\cup Y$ eine Zerlegung von $[a,c]$. Es folgt sofort aus den Definitionen, dass

$$(*)\qquad U(f,X)+U(f,Y) \;=\; U(f,X\cup Y) \qquad \text{und} \qquad O(f,X)+O(f,Y) \;=\; O(f,X\cup Y).$$

Es folgt also, dass

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} U(f,X_n) \;+\; \lim_{n\to\infty} U(f,Y_n) \;\overset{\text{folgt aus }(*)}{=}\; \lim_{n\to\infty} U(f,X_n\cup Y_n)\\ &\leq\; \lim_{n\to\infty} O(f,X_n\cup Y_n) \;\underset{\text{folgt aus }(*)}{=}\; \lim_{n\to\infty} O(f,X_n) \;+\; \lim_{n\to\infty} O(f,Y_n) \;=\; \int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Alle Ungleichheiten müssen also Gleichheiten sein. Also folgt:

$$\int_a^c f(x)\,dx \;\underset{\substack{\text{Satz 15.2, diesen können wir anwenden}\\ \text{weil oben lauter Gleichheiten vorliegen}}}{=}\; \lim_{n\to\infty} O(f,X_n\cup Y_n) \;\underset{\text{weil oben alles Gleichheiten sind}}{=}\; \int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx.$$

■

15.3. **Beispiele von integrierbaren Funktionen.** In diesem Kapitel wollen wir von verschiedenen Typen von Funktionen zeigen, dass diese integrierbar sind. Beispielsweise wollen wir zeigen, dass stetige Funktionen immer integrierbar sind. Wir werden dazu folgendes Integrabilitätskriterium verwenden:

Satz 15.7. (Riemannsches Integrabilitätskriterium) *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Es gilt:*

$$f \text{ ist integrierbar} \iff \begin{array}{c}\text{zu jedem } \epsilon > 0 \text{ gibt es eine Zerlegung } Z \\ \text{von } [a,b] \text{ mit } O(f,Z) - U(f,Z) < \epsilon.\end{array}$$

Beweis $(*)$. Wir beweisen zuerst die "$\Rightarrow$"-Richtung. Wir nehmen also an, dass die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist. Wir setzen $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Dann gibt es nach Satz 15.2 eine Zerlegung Z mit $I - U(f,Z) < \frac{\epsilon}{2}$ und mit $O(f,Z) - I < \frac{\epsilon}{2}$. Daraus folgt die Ungleichung $O(f,Z) - U(f,Z) < \epsilon$.

Wir beweisen nun die "$\Leftarrow$"-Richtung. Wir nehmen also an, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zerlegung Z des Intervalls $[a,b]$ gibt, so dass $O(f,Z) - U(f,Z) < \epsilon$. Insbesondere gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung Z_n von $[a,b]$, so dass $O(f,Z_n) - U(f,Z_n) < \frac{1}{n}$. Es folgt wiederum aus der Definition der Konvergenz von Folgen, dass

$$\lim_{n\to\infty} U(f,Z_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} O(f,Z_n).$$

Also ist f nach Satz 15.2 integrierbar. ■

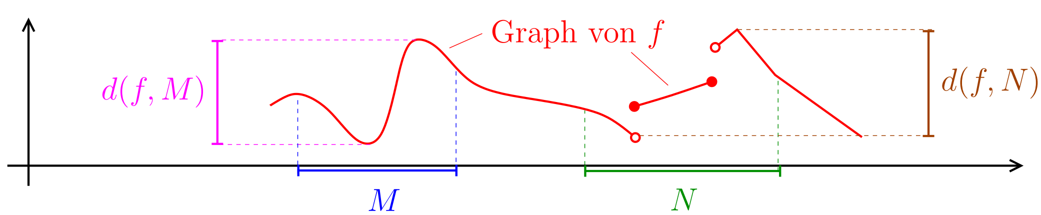
Wir wollen nun die Differenz $O(f,Z) - U(f,Z)$ besser verstehen.

Notation. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Für eine nichtleere Teilmenge $M \subset [a,b]$ definieren wir:

$$d(f,M) \;:=\; \sup\left\{ f(x) - f(x') \,\middle|\, x, x' \in M \right\}.$$

Bemerkung. Aus $|a-b| = \max\{a-b, b-a\}$ folgt:

$$d(f,M) \;=\; \sup\left\{ \,|\, f(x) - f(x') \,|\, \middle|\, x, x' \in M \right\}.$$



Lemma 15.8. *Es sei $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Für jede beliebige Zerlegung $Z = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ von $[a,b]$ gilt:*

$$O(\varphi,Z) - U(\varphi,Z) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) \cdot d(\varphi, [z_i, z_{i+1}]).$$

Beweis. Das Lemma erhalten wir durch folgende Berechnung:

$$\begin{aligned} O(\varphi,Z)-U(\varphi,Z) &= \sum_{i=0}^{n-1}(z_{i+1}-z_i)\cdot\sup\varphi([z_i,z_{i+1}])-\sum_{i=0}^{n-1}(z_{i+1}-z_i)\cdot\inf\varphi([z_i,z_{i+1}]) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(z_{i+1}-z_i)\cdot\big(\sup\varphi([z_i,z_{i+1}])-\inf\varphi([z_i,z_{i+1}])\big) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(z_{i+1}-z_i)\cdot\underbrace{\sup\big\{\varphi(x)-\varphi(x')\,\big|\,x,x'\in[z_i,z_{i+1}]\big\}}_{=d(\varphi,[z_i,z_{i+1}])} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(z_{i+1}-z_i)\cdot d(\varphi,[z_i,z_{i+1}]). \end{aligned}$$

■

Satz 15.9. *Wenn $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion ist, dann ist auch $|f|$ integrierbar und es gilt:*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \;\le\; \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Beweis der Integrierbarkeit von $|f|$. Es sei also $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Wir müssen zeigen, dass $|f|\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ ebenfalls integrierbar ist. Es folgt leicht aus dem Riemannschen Integrabilitätskriterium 15.7, dass es genügt zu zeigen, dass für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ gilt:

$$O(|f|,Z)-U(|f|,Z)\;\le\;O(f,Z)-U(f,Z).$$

Diese Aussage wiederum folgt sofort aus Lemma 15.8 und folgender Behauptung.

Behauptung. Für jede nichtleere Teilmenge $M\subset[a,b]$ gilt: $\quad d(|f|,M)\le d(f,M)$.

Es gilt in der Tat:

$$d(|f|,M)\;=\;\sup\{|f(x)|-|f(x')|\,|\,x,x'\in M\}\;\underset{\uparrow}{\le}\;\sup\{|f(x)-f(x')|\,|\,x,x'\in M\}\;=\;d(f,M).$$

aus der Dreiecksungleichung folgt für alle $x,x'\in M$, dass $|f(x)|-|f(x')|\le|f(x)-f(x')|$,
die Aussage über die Suprema folgt sofort aus dieser Beobachtung ■

Beweis der Ungleichung. Aus der Tatsache, dass für alle $x\in[a,b]$ gilt

$$-|f(x)|\;\le\;f(x)\;\le\;|f(x)|$$

und aus der Monotonieeigenschaft 15.5 des Integrals 15.5 folgt:

$$-\int_a^b|f(x)|\,dx\;\le\;\int_a^b f(x)\,dx\;\le\;\int_a^b|f(x)|\,dx.$$

Es folgt[97] also wie gewünscht, dass $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b|f(x)|\,dx$. ■

[97]Hier verwenden wir die Aussage, dass aus $-y\le z\le y$ folgt: $|z|\le y$.

Satz 15.10. *Jede* stetige *Funktion* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *ist integrierbar.*

Beweis. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir wollen mithilfe des Riemannschen Integrabilitätskriteriums 15.7 zeigen, dass f integrierbar ist. Es sei also $\epsilon > 0$. Wir müssen also eine Zerlegung $Z = \{z_0, \dots, z_n\}$ finden, so dass gilt:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) \cdot d(f, [z_i, z_{i+1}]) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 15.8}}}{=} O(f,Z) - U(f,Z) < \epsilon.$$

Wir müssen dazu nur folgende Behauptung beweisen.[98]

Behauptung. Es gibt eine Zerlegung $Z = \{z_0, \dots, z_n\}$, so dass für alle i gilt:

$$d(f, [z_i, z_{i+1}]) < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

> Wir müssen also eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ finden, welche so "fein" ist, dass die maximale Differenz auf jedem Teilintervall $[z_i, z_{i+1}]$ höchstens $\frac{\epsilon}{b-a}$ beträgt. Anders ausgedrückt, die z_i's müssen so eng beieinander liegen, dass die Funktionswerte dazwischen sich nur noch um höchstens $\frac{\epsilon}{b-a}$ unterscheiden können. Eine solche Zerlegung finden wir, wenn wir uns der gleichmäßigen Stetigkeit entsinnen.

Nachdem f stetig ist und auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ definiert ist, folgt aus Satz 7.14, dass f gleichmäßig stetig ist. Zur Erinnerung, das heißt

$$\underset{\boldsymbol{\eta}>0}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} \; \underset{\substack{x, x' \in [a,b] \\ \text{mit } |x-x'|<\delta}}{\forall} \; |f(x) - f(x')| < \boldsymbol{\eta}.$$

Mit anderen Worten, es gilt

$$\underset{\boldsymbol{\eta}>0}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} \; \underset{\substack{\text{Intervalle} \\ [c,d] \subset [a,b] \\ \text{mit Länge} \leq \delta}}{\forall} \; d(f, [c,d]) < \boldsymbol{\eta}.$$

Wir setzen nun $\boldsymbol{\eta} = \frac{\epsilon}{b-a}$ und wir wählen ein $\delta > 0$ mit der obigen Eigenschaft.

> Die Idee ist nun eine Zerlegung zu wählen, so dass die Länge von jedem Teilintervall $[z_k, z_{k+1}]$ höchstens δ beträgt.

Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{b-a}{n} < \delta$. Wir betrachten dann die Zerlegung $z_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$, wobei $i = 0, \dots, n$. Dann gilt, wie gewünscht für alle i, dass $d(f, [z_i, z_{i+1}]) < \frac{\epsilon}{b-a}$. ■

---

[98] Wenn für alle i gilt $d(f, [z_i, z_{i+1}]) < \frac{\epsilon}{b-a}$, dann folgt

$$\sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) \cdot d(f, [z_i, z_{i+1}]) \leq \sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) \cdot \frac{\epsilon}{b-a} = (b-a) \cdot \frac{\epsilon}{b-a} = \epsilon.$$

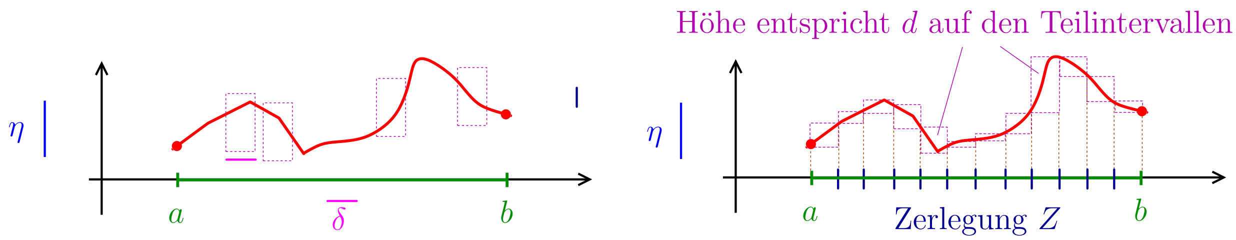
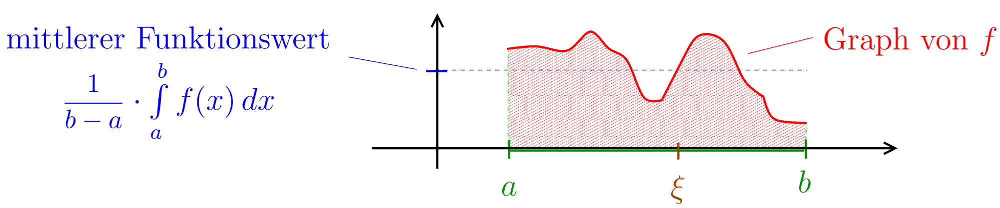


Abbildung 42. Illustration für den Beweis von Satz 15.10.

15.4. **Mittelwertsatz der Integralrechnung.** Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung 13.2 besagt, dass unter gewissen Voraussetzungen, die "mittlere Steigung" einer Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ als Wert $f'(\xi)$ der Ableitung an einem Punkt angenommen wird. Der folgende Mittelwertsatz der Integralrechnung macht nun eine ähnliche Aussage über "mittlere Funktionswerte".

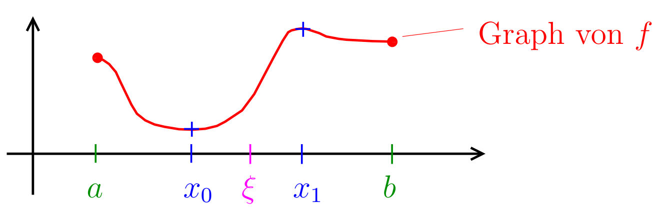
Satz 15.11. (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Wenn $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine* stetige *Funktion ist, dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$, so dass*

$$f(\xi) \;=\; \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$



Beweis.

Die Aussage erinnert etwas an den Zwischenwertsatz 8.3 für stetige Funktionen. Allerdings gibt es keinen Grund anzunehmen, dass $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt. Beispielsweise ist dies nicht der Fall für die Funktion, welche in der Abbildung unten skizziert ist. Die Idee ist nun, dass wir uns auf ein Teilintervall $[x_0, x_1]$ von $[a,b]$ einschränken, so dass das Intervall $[f(x_0), f(x_1)]$ "so groß wie möglich" ist.



Nachdem f stetig ist, folgt aus Satz 8.2, dass es $x_0, x_1 \in [a,b]$ gibt, so dass für alle $x \in [a,b]$ gilt:

$$f(x_0) \quad\leq\quad f(x) \quad\leq\quad f(x_1).$$

Es folgt aus der Monotonieeigenschaft 15.5 des Integrals, dass

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \cdot \underbrace{\int_a^b f(x_0)\,dx}_{\substack{= f(x_0)\cdot(b-a) \text{ da} \\ \text{Integrand konstant}}} \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx}_{\substack{\text{liegt also zwischen} \\ f(x_0) \text{ und } f(x_1)}} \leq \frac{1}{b-a} \cdot \underbrace{\int_a^b f(x_1)\,dx}_{\substack{= f(x_1)\cdot(b-a) \text{ da} \\ \text{Integrand konstant}}} = f(x_1).$$

Wir sehen also, dass $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ zwischen den Funktionswerten $f(x_0)$ und $f(x_1)$ liegt. Es folgt nun also aus dem Zwischenwertsatz 8.3, dass es ein ξ zwischen x_0 und x_1 gibt, welches die gewünschte Eigenschaft besitzt. ■

16. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

16.1. **Stammfunktionen.**

Definition. Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall und es sei $F\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche differenzierbar ist im Inneren von I. Wir definieren:

$$F \text{ ist } \textit{Stammfunktion von } f \quad :\Longleftrightarrow \quad F'(x) = f(x) \quad \text{für alle inneren Punkte } x \text{ von } I.$$

Eine Stammfunktion wird manchmal auch *Aufleitung* genannt.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rcl} [0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \end{array} \qquad \text{eine Stammfunktion ist gegeben durch} \qquad \begin{array}{rcl} [0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}. \end{array}$$

Bemerkung. Aus den schon bestimmten Ableitungen erhalten wir sogar eine lange Tabelle an Stammfunktionen:

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	Funktion $g(x)$	Stammfunktion $G(x)$
$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\arcsin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
e^x	e^x	e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	x^β für $\beta \neq -1$	$\dfrac{x^{\beta+1}}{\beta+1}$
$\ln(x)$ für $x > 0$	$\frac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
$\ln(-x)$ für $x < 0$	$\frac{1}{x}$		

Wenn F eine Stammfunktion einer Funktion f ist, dann erhalten wir weitere Stammfunktionen von f, indem wir zu F eine beliebige konstante Funktion dazu addieren. Das folgende Lemma besagt nun, dass dies die einzige Möglichkeit ist, weitere Stammfunktion zu finden.

Lemma 16.1. *Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall. Wenn F und G Stammfunktionen von $f\colon I \to \mathbb{R}$ sind, dann ist die Funktion $F - G$ eine konstante Funktion.*

Beweis. Für alle x im Inneren von I gilt:

$$(F-G)'(x) \;=\; F'(x) - G'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } F \text{ und } G \text{ Stammfunktionen von } f}}{=} f(x) - f(x) \;=\; 0.$$

Da F und G zudem per Definition einer Stammfunktion stetig sind folgt nun aus dem Tachosatz, also Korollar 13.5, dass $F - G$ eine konstante Funktion ist. ■

Lemma 16.1 motiviert nun folgende Notation.

Notation. Für zwei Funktionen $F, G\colon I \to \mathbb{R}$ schreiben wir:

$$F \doteq G \qquad \Longleftrightarrow \qquad F - G \text{ ist eine konstante Funktion.}$$

Beispiel. Es ist

$$x^2 + 2 \doteq x^2 - 3 \qquad \text{und} \qquad \sin^2(x) \doteq -\cos^2(x).$$

Frage 16.2. *Besitzt jede stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion?*

Es ist normalerweise schwierig für eine gegebene Funktion eine Stammfunktion explizit hinzuschreiben. Beispielsweise, was eine Stammfunktion der Funktion $x \mapsto \ln(x)$ oder was ist eine Stammfunktion der Funktion $x \mapsto \exp(-x^2)$?

16.2. **Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.** In diesem Teilkapitel wollen wir Frage 16.2 beantworten. Dazu benötigen wir folgende Notation.

Notation. Es sei I ein Intervall und es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für $b < a$ in I definieren wir

$$\int_a^b f(x)\,dx \;:=\; -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Für $a \in I$ definieren wir zudem

$$\int_a^a f(x)\,dx \;:=\; 0.$$

Wir können nun einen der wichtigsten Sätze der Analysis I formulieren, welcher ganz nebenbei auch Frage 16.2 mit “Ja” beantwortet.

Satz 16.3. (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung - HDI) *Es sei im Folgenden $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall I und es sei $x_0 \in I$. Die Funktion*

$$\begin{aligned} F\colon I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x) := \underbrace{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}_{\substack{\text{Riemann-Integral} \\ \text{existiert, da } f \text{ stetig}}}, \end{aligned}$$

ist eine Stammfunktion von f.

Beweis. In Übungsblatt 11 zeigen wir, dass F stetig ist. Wir müssen also noch zeigen, dass F im Inneren des Intervalls differenzierbar ist und dort $F' = f$ gilt. Es sei $x \in I$ ein beliebiger innerer Punkt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h \searrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \right) \\ &\overset{\substack{\text{folgt aus Lemma 15.6 und aus } h>0 \\ \downarrow}}{=} \lim_{h \searrow 0} \underbrace{\frac{1}{h} \cdot \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt}_{\substack{= f(\xi_h) \text{ für ein } \xi_h \in [x, x+h], \\ \text{nach dem Mittelwertsatz 15.11} \\ \text{der Integralrechnung}}} = \lim_{h \searrow 0} f(\xi_h) \overset{\substack{\text{weil } f \text{ stetig} \\ \downarrow}}{=} f\Big(\lim_{h \searrow 0} \xi_h\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn aus } \xi_h \in [x, x+h] \\ \text{folgt } \lim\limits_{h \searrow 0} \xi_h = x}}{=} f(x). \end{aligned}$$

Ganz analog gilt auch für den linksseitigen Grenzwert:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\nearrow 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \lim_{h\nearrow 0}\frac{1}{h}\cdot\left(\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right)\\
&\overset{\substack{\text{folgt aus Lemma 15.6 und aus } h<0\\ \downarrow}}{=} \lim_{h\nearrow 0}\underbrace{\frac{1}{-h}\cdot\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt}_{\substack{=f(\xi_h)\text{ für ein }\xi_h\in[x,x+h],\\ \text{nach dem Mittelwertsatz 15.11}\\ \text{der Integralrechnung}}} = \lim_{h\nearrow 0} f(\xi_h) \overset{\substack{\text{weil } f \text{ stetig}\\ \downarrow}}{=} f\left(\lim_{h\nearrow 0}\xi_h\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn aus }\xi_h\in[x,x+h]\\ \text{folgt }\lim_{h\nearrow 0}\xi_h = x}}{=} f(x).
\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass sowohl der rechtsseitige als auch der linksseitige Grenzwerte existieren und mit $f(x)$ übereinstimmen. Wir haben also die gewünschte Aussage bewiesen. ■

Satz 16.4. *Es sei $f\colon I\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall I und es sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt für alle $a,b\in I$, dass*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b)-F(a).$$

Beweis. Es sei $f\colon I\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall I und es sei F eine Stammfunktion von f. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} G\colon I &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \int_a^x f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Der Hauptsatz 16.3 der Differential- und Integralrechnung besagt, dass G ebenfalls eine Stammfunktion von f ist. Nachdem sowohl F als auch G Stammfunktionen von f sind folgt aus Lemma 16.1, dass ein $C\in\mathbb{R}$ existiert, so dass $F(x)=G(x)+C$ für alle $x\in I$. Also gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{\int_a^a f(x)\,dx}_{=0} \;=\; G(b)-G(a) \;=\; (G(b)+C)-(G(a)+C) \;=\; F(b)-F(a).$$

■

Notation. Für eine beliebige Funktion $F\colon I\to\mathbb{R}$ und $a,b\in I$ schreiben wir

$$\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} \;:=\; F(b)-F(a).$$

Beispiel. Wir führen folgende zwei Berechnungen durch:

(1)
$$\int_0^1 x\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus Satz 16.4 und der Tatsache, dass } x\mapsto\frac{1}{2}x^2 \text{ Stammfunktion von } x\mapsto x \text{ ist}}}{=} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} \;=\; \frac{1^2}{2}-\frac{0}{2} \;=\; \frac{1}{2}.$$

Wir haben also jetzt ganz einfach das Riemann-Integral berechnet, welches wir auf Seite 178 noch mühevoll mithilfe der Definition des Riemann-Integrals bestimmt hatten.

(2)
$$\int_{-5}^{-1} \frac{1}{x}dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Satz 16.4 und der Tatsache, dass } x \mapsto \ln(|x|) \text{ eine Stammfunktion von } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ ist}}}{=} \Big[\ln(|x|)\Big]_{x=-5}^{x=-1} = \ln(|-1|) - \ln(|-5|) = \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(5) = -\ln(5).$$

16.3. **Bestimmung von Stammfunktionen.** Der Hauptsatz 16.3 der Differential- und Integralrechnung motiviert folgende Notation.

Notation. Wenn $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, dann schreiben wir im Folgenden[99]
$$\int f(x)\,dx \;\doteq\; F(x).$$

Beispiel. Es ist
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \;\doteq\; \arctan(x) \quad \text{aber auch} \quad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx \;\doteq\; \arctan(x)+3.$$

Satz 16.4 gibt uns weitere Motivation um Stammfunktionen für explizit gegebene Funktionen zu bestimmen. Wir beginnen mit folgendem elementaren Lemma.

Lemma 16.5. *Es sei I ein Intervall, es seien $f,g\colon I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und es sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt*[100]
$$\begin{aligned} \int f(x)+g(x)\,dx \;&\doteq\; \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx, \\ \int \lambda \cdot f(x)\,dx \;&\doteq\; \lambda \cdot \int f(x)\,dx. \end{aligned}$$

Beweis. Dieses Lemma folgt aus Satz 12.4 und der Definition von Stammfunktionen. ■

Es stellt sich nun die Frage, welche weiteren Integrationsregeln es gibt. Beispielsweise würde man sich erhoffen, dass es Produktregeln und Quotientenregeln für Stammfunktionen gibt. Auf Seite 187 hatten wir unter anderem gesehen, dass
$$\int \frac{1}{x}\,dx \;\doteq\; \ln(|x|) \qquad \text{und} \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx \;\doteq\; \arctan(x).$$

Es folgt aus diesen beiden Beispielen, dass es *keine* Produktregel oder Quotientenregel für Stammfunktionen gibt, d.h. es gibt beispielsweise keine allgemein gültige Regel, wie man eine Stammfunktion eines Produkts $f \cdot g$ aus den Funktionen f und g und aus Stammfunktionen von f und g herleiten kann.

---

[99]Zur Erinnerung, wir schreiben $F \doteq G$, wenn die Funktionen F und G sich nur um eine konstante Funktion unterscheiden. Es folgt aus Lemma 16.1, dass für je zwei Stammfunktionen F und G einer Funktion auf einem Intervall gilt $F \doteq G$. Deshalb ist es bei der Beschreibung von Stammfunktionen besser mit "$\doteq$" als mit "$=$" zu arbeiten.

[100]Mit anderen Worten, wenn F eine Stammfunktion von f ist, und wenn G eine Stammfunktion von g ist, dann ist $F+G$ eine Stammfunktion von $f+g$.

16.4. **Stammfunktionen von elementaren Funktionen** $(*)$. Wir wollen die Diskussion am Ende des letzten Teilkapitel noch etwas fortsetzen. Wir müssen dazu etwas weiter ausholen und führen erst einmal folgende Definition ein.

Definition. Die *elementaren Funktionen* sind die Funktionen, welche man aus den Polynomfunktionen, der Exponentialfunktion, der Sinusfunktion durch (mehrfaches) Anwenden folgender Operationen erhalten kann:

(1) Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division,
(2) Einschränkung des Definitionsbereichs auf ein offenes Teilintervall,
(3) Verknüpfung,
(4) Bilden der Umkehrfunktion.

Beispiel. Die folgenden Funktionen sind beispielsweise elementar:

$$e^{-x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}, \quad \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{und} \quad \sin(\sqrt{x}) + \frac{\arctan(x)}{\ln(x)+3}.$$

Es folgt aus der Produktregel 12.4, der Quotientenregel 12.4, der Kettenregel 12.7 und der Umkehrregel 12.9, dass die *Ableitung* einer elementaren Funktion wiederum eine elementare Funktion ist. Der folgende Satz besagt, dass die analoge Aussage für Stammfunktionen *nicht* gilt.

Satz 16.6. *Die elementaren Funktionen $x \mapsto e^{-x^2}$ und $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ besitzen keine Stammfunktionen, welche elementar sind.*

Beweis. Der Satz wird in [C, Theorem 4.1] und [AE, Seite 44] bewiesen. ■

Wir sehen also, dass wir beim Betrachten von Stammfunktionen neue, uns bisher unbekannte Funktionen entdecken.

16.5. **Partielle Integration.** In diesem und dem nächsten Teilkapitel wollen wir zwei Methoden kennenlernen, mit denen man zumindest manchmal Stammfunktionen explizit bestimmen kann.

Nachdem Stammfunktionen über Ableitungen definiert sind können wir aus unseren Ergebnisse über Ableitungen neue Aussagen über Stammfunktionen gewinnen. In diesem, und dem folgenden Teilkapitel werden wir sehen, wie die Produktregel und die Kettenregel für Ableitungen uns bei der Bestimmung von Stammfunktionen helfen können.

Satz 16.7. (Partielle Integration) *Es seien $u, v\colon I \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare* [101] *Funktionen auf einem offenen Intervall I und es sei V eine Stammfunktion von v. Dann gilt*

$$\int u(x) \cdot v(x)\, dx \;\doteq\; u(x) \cdot V(x) - \int u'(x) \cdot V(x)\, dx.$$

[101] Zur Erinnerung, eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, wenn f differenzierbar und wenn f' stetig ist. Wir benötigen diese Voraussetzung, um sicher zu stellen, dass $u(x) \cdot v(x)$ und $u'(x) \cdot V(x)$ stetig sind.

Beweis. Aus der Produktregel 12.4 der Ableitung und der Definition einer Stammfunktion folgt, dass

$$(u(x) \cdot V(x))' \;=\; u'(x) \cdot V(x) + u(x) \cdot \underbrace{v(x)}_{=V(x)'},$$

also ist

$$u(x) \cdot v(x) \;=\; (u(x) \cdot V(x))' - u'(x) \cdot V(x).$$

Aus Lemma 16.5 und der Definition einer Stammfunktion folgt nun, wie erhofft, dass

$$\int u(x) \cdot v(x)\, dx \;\doteq\; u(x) \cdot V(x) - \int u'(x) \cdot V(x)\, dx. \qquad \blacksquare$$

Bemerkung.

(1) Die Formel aus dem vorherigen Satz kann man sich wie folgt merken:

$$\int u(x) \cdot v(x)\, dx \;\doteq\; \underset{\bullet}{u(x)} \cdot \underset{\uparrow}{V(x)} \;-\; \int \underset{\downarrow}{u'(x)} \cdot \underset{\uparrow}{V(x)}\, dx.$$

Die Pfeile $\downarrow$ und $\uparrow$ zeigen an, ob der Term abgeleitet oder aufgeleitet wurde. Das Symbol $\bullet$ zeigt an, dass dieser Faktor sich nicht ändert.

(2) Für $a, b \in I$ folgt zudem aus Satz 16.4, dass gilt:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\, dx \;=\; \big[u(x) \cdot V(x)\big]_a^b \;-\; \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\, dx.$$

Beispiel.

(1) Wir wollen eine Stammfunktion von $x \mapsto x \cdot \cos(x)$ bestimmen. Es gilt:

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v}\, dx \;\overset{p.\ I.}{\doteq}\; \underbrace{\overset{\bullet}{x}}_{u} \cdot \underbrace{\overset{\uparrow}{\sin(x)}}_{V} - \int \underbrace{\overset{\downarrow}{1}}_{u'} \cdot \underbrace{\overset{\uparrow}{\sin(x)}}_{V}\, dx \;\doteq\; x \cdot \sin(x) + \cos(x).$$

$$\begin{array}{rll} \text{wir setzen} & u(x) = x & v(x) = \cos(x) \\ \text{dann ist} & u'(x) = 1 & V(x) = \sin(x) \end{array}$$

(2) Manchmal muss man ein Integral erst geschickt als Produkt umschreiben, um partielle Integration erfolgreich anwenden zu können. Beispielsweise ist

$$\int \ln(x)\, dx \;\doteq\; \int \ln(x) \cdot 1\, dx \;\overset{p.\ I.}{\doteq}\; \underset{\bullet}{\ln(x)} \cdot \underset{\uparrow}{x} \;-\; \int \underset{\downarrow}{\frac{1}{x}} \cdot \underset{\uparrow}{x}\, dx \;\doteq\; \ln(x) \cdot x - x.$$

(3) Es kann notwendig sein, partielle Integration mehrmals anzuwenden. Beispielsweise gilt:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \cos(x)\, dx \;&\overset{p.\ I.}{\doteq}\; x^2 \cdot \sin(x) - \int 2x \cdot \sin(x)\, dx \\ &\overset{p.\ I.}{\doteq}\; x^2 \cdot \sin(x) - \Big(2x \cdot (-\cos(x)) - \int 2 \cdot (-\cos(x))\, dx\Big) \\ &\doteq\; x^2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) - 2 \cdot \sin(x). \end{aligned}$$

Bemerkung. Mithilfe der partiellen Integration kann man also ein Integral durch ein anderes, hoffentlich deutlich leichteres, Integral ersetzen. Die partielle Integration bietet sich an, wenn $u(x)$ eine "einfachere Ableitung" besitzt, z.B. $u(x) = x^n$ oder $u(x) = \ln(x)$. Denn durch den Übergang von $u(x) \cdot v(x)$ zu $u'(x) \cdot V(x)$ erhalten wir dadurch, mit etwas Glück, einen einfacheren Integranden.

Beispiel. Manchmal muss man auf der Suche nach Stammfunktionen auch Ausdauer und Kreativität zeigen und darf dabei den Überblick nicht verlieren. Beispielsweise gilt:

$$\begin{aligned}
\int \cos^2(x)\,dx \;\doteq\; \int \cos(x)\cdot\cos(x)\,dx &\overset{p.\ I.}{\doteq} \cos(x)\cdot\sin(x) - \int (-\sin(x))\cdot\sin(x)\,dx \\
&\doteq \cos(x)\cdot\sin(x) + \int (1-\cos^2(x))\,dx \\
&\doteq \cos(x)\cdot\sin(x) + x - \int \cos^2(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Wir lösen jetzt nach $\int \cos^2(x)\,dx$ auf, und erhalten, dass

$$\int \cos^2(x)\,dx \;\doteq\; \frac{1}{2}\cdot(\cos(x)\cdot\sin(x)+x).$$

16.6. **Substitution.**

Lemma 16.8. *Es sei I ein Intervall, es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es sei F eine Stammfunktion von f. Für alle $c, d \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\int f(cx+d)\,dx \;\doteq\; \tfrac{1}{c}\cdot F(cx+d).$$

Beweis. Es gilt:

$$\left(\frac{1}{c}\cdot F(cx+d)\right)' \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Kettenregel 12.4 für Ableitungen}}}{=} \frac{1}{c}\cdot F'(cx+d)\cdot(cx+d)' \underset{\substack{\uparrow\\ \text{da } F \text{ Stammfunktion von } f}}{=} f(cx+d).$$

Per Definition einer Stammfunktion ist das genau die Aussage, welche wir beweisen mussten. ■

Beispiel.

(1) Es gilt

$$\int \cos(2x+3)\;dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus Lemma 16.8 und der Tatsache, dass } F(x)=\sin(x)\\ \text{eine Stammfunktion von } f(x)=\cos(x) \text{ ist}}}{\doteq} \frac{1}{2}\cdot\sin(2x+3).$$

(2) Wir wollen jetzt noch mal einen anderen Ansatz wählen um eine Stammfunktion für $\cos^2(x)$ zu finden. Die Idee ist dieses Mal, dass wir $\cos^2(x)$ geschickt umschreiben. Wir wissen, dass

$$\sin^2(x)+\cos^2(x) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Lemma 11.3}}}{=} 1 \qquad \text{und} \qquad \cos(2x) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus Satz 11.4}}}{=} \cos^2(x)-\sin^2(x).$$

Durch Auflösen nach $\cos^2(x)$ erhalten wir:

$$\cos^2(x) \;=\; \frac{1}{2}(\cos(2x)+1).$$

Es folgt:

$$\int \cos^2(x)\,dx \doteq \frac{1}{2}\int \cos(2x)+1\,dx \doteq \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{2}\int 1\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{folgt aus Lemma 16.8 und der Tatsache, dass sin Stammfunktion von cos ist}}}{\doteq} \frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{2}x.$$

Satz 16.9. (Substitutionsregel für Stammfunktionen) *Es seien I und J zwei offene Intervalle, es sei $u\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $u(I) \subset J$ und zudem sei $\varphi\colon J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktionen. Wenn $\Phi\colon J \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion für φ ist, dann gilt*

$$\int \varphi(u(x))\cdot u'(x)\,dx \underset{(1)}{\doteq} \Phi(u(x)) \underset{(2)}{\doteq} \begin{array}{l}\textit{Funktion, welche wir erhalten, indem}\\ \textit{wir } u = u(x) \textit{ in } \int \varphi(u)\,du \textit{ einsetzen.}\end{array}$$

Beweis.

(1) Es gilt: $$\frac{d}{dx}\Phi(u(x)) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Kettenregel 12.7 für Ableitungen}}}{=} \Phi'(u(x))\cdot u'(x) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{da } \Phi \text{ Stammfunktion von } \varphi}}{=} \varphi(u(x))\cdot u'(x).$$

Also ist $\Phi(u(x))$ in der Tat eine Stammfunktion von $\varphi(u(x))\cdot u'(x)$.

(2) Die zweite Gleichheit des Satzes folgt aus der Beobachtung, das der Term ganz rechts nur eine andere Schreibweise des mittleren Terms ist, denn $\int \varphi(u)\,du$ ist ja gerade die Notation für eine Stammfunktion von φ. ∎

Beispiel. Wir führen folgende Berechnung durch:

$$\int \sin(\underbrace{x^2+3}_{=:u(x)})\cdot \underbrace{2x}_{=u'(x)}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Substitutionsregel mit}\\ \varphi(u)=\sin(u) \text{ und } u(x)=x^2+3}}{\doteq} \int \sin(u)\,du \doteq -\cos(u) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Rücksubstitution, d.h. wir setzen } u=x^2+3\\ \text{in die Stammfunktion } \int\sin(u)\,du \doteq -\cos(u) \text{ ein}}}{\doteq} -\cos(x^2+3).$$

Ansatz 16.10. *In der Praxis führt man Integration durch Substitution also wie folgt durch.*

(1) *Man versucht den Integranden in die Form $f(x) = \varphi(u(x))\cdot u'(x)$ für geeignete Funktionen φ und u zu bringen.*
(2) *Man bestimmt $\int \varphi(u)\,du$.*
(3) *Man setzt $u = u(x)$ in $\int \varphi(u)\,du$ ein, um eine Stammfunktion für die ursprüngliche Funktion $f(x) = \varphi(u(x))\cdot u'(x)$ zu erhalten.*

Beispiel. In vielen Beispielen braucht man etwas Geschick um eine zielführende Substitution zu finden.

(1) $$\int x\cdot\ln(x^2+3)\,dx \doteq \tfrac{1}{2}\int \ln(\underbrace{x^2+3}_{=:u(x)})\cdot\underbrace{2x}_{=u'(x)}\,dx \overset{\substack{\text{Substitution } u=x^2+3 \text{ mit } u'=2x\\ \downarrow}}{\doteq} \tfrac{1}{2}\int \ln(u)\,du$$
$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{siehe Seite 192}}}{\doteq} \tfrac{1}{2}\cdot u\cdot(\ln(u)-1) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Rücksubstitution } u=x^2+3}}{\doteq} \tfrac{1}{2}\cdot(x^2+3)\cdot(\ln(x^2+3)-1).$$

(2) $$\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx \doteq \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+(x^3)^2}\cdot 3x^2\,dx \doteq \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+u^2}\,du \doteq \frac{1}{3}\arctan(u) \doteq \frac{1}{3}\arctan(x^3).$$

Substitution $u = x^3$ mit $u' = 3x^2$ — Rücksubstitution $u = x^3$

(3) $$\int \cos(\sqrt{x})\,dx \doteq 2\cdot\int \cos(\underbrace{\sqrt{x}}_{=:u(x)})\cdot\underbrace{\sqrt{x}}_{=:u(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{=u'(x)}\,dx = 2\cdot\int \cos(u)\cdot u\,du$$

wir wollen die Substitution $u=\sqrt{x}$ durchführen, dazu müssen wir den Term $u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ einführen — Substitution $u = \sqrt{x}$

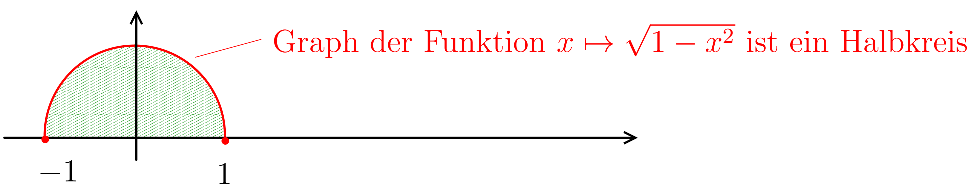
$$\doteq 2(u\cdot\sin(u)+\cos(u)) \doteq 2(\sqrt{x}\cdot\sin(\sqrt{x})+\cos(\sqrt{x})).$$

auf Seite 192 hatten wir mithilfe von partieller Integration eine Stamm-Funktion von $u\mapsto\cos(u)\cdot u$ bestimmt — Rücksubstitution $u = \sqrt{x}$

Das nächste Beispiel ist so interessant, dass wir es als Lemma formulieren.

Lemma 16.11. *Es ist*
$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi.$$

Bemerkung. Nachdem der Graph von $\sqrt{1-x^2}$ gerade einen Halbkreis von Radius 1 beschreibt, besagt dieses Lemma, dass "unsere" Definition von π aus Kapitel 11.2 in der Tat mit der "üblichen" Definition von π über den Flächeninhalt übereinstimmt.



Beweis. Wir ignorieren erst einmal die Grenzen des Integrals und führen folgende Berechnung durch:[102][103]

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1-x^2}\,dx &\doteq \int(1-x^2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &\doteq \int(1-\sin(\underbrace{\arcsin(x)}_{=:u(x)})^2)\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{=u'(x)}\,dx \doteq \int 1-\sin(u)^2\,du\\ &\doteq \int\cos^2(u)\,du \doteq \tfrac{1}{2}u+\tfrac{1}{4}\sin(2u) \doteq \tfrac{1}{2}\arcsin(x)+\tfrac{1}{4}\sin(2\arcsin(x)).\end{aligned}$$

Substitution $u = \arcsin(x)$ — siehe Seite 194 — Rücksubstitution $u = \arcsin(x)$

[102]Man könnte den Term $\sin(2\arcsin(x))$ ganz am Ende noch vereinfachen, führt uns aber nicht weiter, und wir unterlassen dies deshalb.

[103]In Übungsblatt 12 werden wir aus Freude am Rechnen partielle Integration, anstatt Substitution, verwenden, um eine weitere Stammfunktion von $\sqrt{1-x^2}$ zu bestimmen.

Jetzt erinnern wir uns an die Grenzen des Integrals und erhalten:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \left[\tfrac{1}{2}\arcsin(x) + \tfrac{1}{4}\sin(2\arcsin(x))\right]_{-1}^{1} \underset{\uparrow}{=} \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{4}\sin(\pi) - \tfrac{-\pi}{4} - \tfrac{1}{4}\sin(-\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

folgt aus Satz 16.4 und der gerade bestimmten Stammfunktion von $\sqrt{1-x^2}$

denn $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ und $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ ■

Der folgende Satz ist eine Variante der obigen Substitutionsregel für Stammfunktionen.

Satz 16.12. (Substitutionsregel für Integrale) *Es seien I und J zwei offene Intervalle, es sei $u\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $u(I) \subset J$ und zudem sei $\varphi\colon J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktionen. Für alle $a, b \in I$ gilt:*

$$\int_a^b \varphi(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} \varphi(u)\,du.$$

Beweis. Es sei $\Phi\colon J \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von φ. Wir führen folgende Berechnung durch:

$$\int_a^b \varphi(u(x)) \cdot u'(x)\,dx \underset{\uparrow}{=} \big[\Phi(u(x))\big]_{x=a}^{x=b} = \Phi(u(b)) - \Phi(u(a)) = \big[\Phi(u)\big]_{u=u(a)}^{u=u(b)} \underset{\uparrow}{=} \int_{u(a)}^{u(b)} \varphi(u)\,du.$$

nach Satz 16.9 ist $\Phi(u(x))$ eine Stammfunktion also folgt die Gleichheit aus Satz 16.4

Satz 16.4 ■

Beispiel.

$$\int_{x=2}^{x=5} \frac{1}{1+3\cdot x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_{x=2}^{x=5} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{3}x)^2} \cdot \sqrt{3}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_{u=u(2)=2\sqrt{3}}^{u=u(5)=5\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{1+u^2}\,du$$

wir treffen Vorbereitungen für eine Substitution $u = \sqrt{3}x$

Substitution $u = \sqrt{3}x$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\arctan(u)\Big]_{u=2\sqrt{3}}^{u=5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\arctan\big(5\sqrt{3}\big) - \arctan\big(2\sqrt{3}\big)\Big).$$

folgt aus der Tabelle auf Seite 187

Bemerkung. Zusammengefasst sehen wir also, dass es nur wenige Ansätze gibt, Stammfunktionen einer gegebenen Funktion explizit anzugeben:

(1) Wir haben die Tabelle von Stammfunktionen auf Seite 187.
(2) Partielle Integration.
(3) Substitution.
(4) Geschicktes Umschreiben von Funktionen und Termen, so dass wir mit (1)–(3) vorwärts kommen.

Aber Satz 16.6 sagt uns, dass diese Ansätze bei vielen (ja eigentlich sogar bei den allermeisten) Funktionen zum scheitern verurteilt sind. Es ist leider im Allgemeinen nicht möglich, eine Stammfunktion einer gegebenen Funktion explizit anzugeben.

17. Uneigentliche Integrale

Definition. Es sei $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, wobei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Wir definieren

$$\int_a^b f(x)\,dx \;:=\; \lim_{d \nearrow b} \int_a^d f(x)\,dx \qquad \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

wenn der Grenzwert auf der rechten Seite in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert. Wenn dies der Fall ist, dann nennen wir den Grenzwert das *uneigentliche Integral von f auf $[a,b)$*. Ganz analog definiert man das uneigentliche Integral auf einem halb-offenen Intervall $(a,b]$.

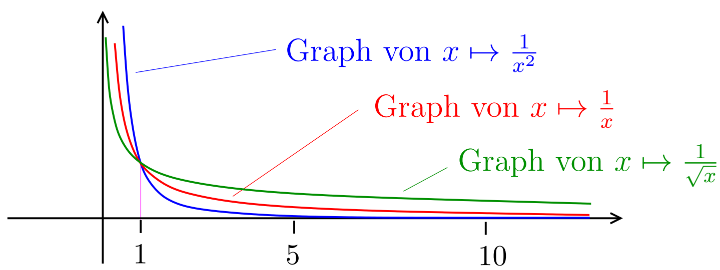
Beispiel. Es sei $\mu \in (-\infty, 0)$. Dann gilt:

$$\int_0^\infty e^{\mu \cdot x}\,dx \;=\; \lim_{d\to\infty} \int_0^d e^{\mu\cdot x}\,dx \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Lemma 16.8}}}{=}\; \lim_{d\to\infty} \left[\tfrac{1}{\mu}\cdot e^{\mu\cdot x}\right]_0^d \;=\; \lim_{d\to\infty} \left(\tfrac{1}{\mu}\cdot e^{\mu\cdot d} - \tfrac{1}{\mu}\right) \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus } \mu<0}}{=}\; -\tfrac{1}{\mu}.$$

Für später formulieren wir das nächste Beispiel als Lemma.

Lemma 17.1. *Für $s \in (0,\infty)$ gilt*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{s-1}, & \textit{falls } s > 1, \\ +\infty, & \textit{falls } s \le 1. \end{cases}$$



Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall $s \neq 1$. In diesem Fall gilt:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx \;=\; \lim_{d\to\infty} \int_1^d x^{-s}\,dx \;=\; \lim_{d\to\infty} \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^d \;=\; \lim_{d\to\infty} \left(\frac{d^{-s+1}}{-s+1} + \frac{1}{s-1}\right) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{s-1}, & \text{falls } s>1, \\ +\infty, & \text{falls } s<1. \end{cases}$$

Nun betrachten wir noch den Fall $s = 1$. In diesem Fall gilt:

$$\int_1^\infty \tfrac{1}{x}\,dx \;=\; \lim_{d\to\infty} \int_1^d \frac{1}{x}\,dx \;=\; \lim_{d\to\infty} \big[\ln(x)\big]_1^d \;=\; \lim_{d\to\infty} (\ln(d) - \ln(1)) \;=\; +\infty.$$

■

Definition. Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, wobei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und wobei $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Wir wählen ein $c \in (a,b)$. Wir definieren das *uneigentliche Integral von f auf (a,b)* wie folgt:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;:=\; \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

wenn die beiden uneigentlichen Integrale rechts in $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ definiert sind, und wenn dann auch die Summe im Sinne der Tabelle auf Seite 42 definiert ist.[104]

Satz 17.2. *Es sei $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{x\nearrow b} F(x) - \lim_{x\searrow a} F(x),$$

wenn *die rechte Seite definiert ist.*

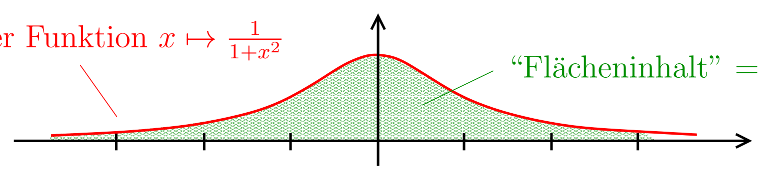
Beweis. Der Satz folgt eigentlich sofort aus Satz 16.4 und aus den Definitionen. Es sei also $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es sei F eine Stammfunktion von f. Es sei $c\in(a,b)$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \;&=\; \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx \;=\; \lim_{x\nearrow b}\int_c^x f(t)\,dt + \lim_{x\searrow a}\int_x^c f(t)\,dt\\ &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 16.4}}}{=} \lim_{x\nearrow b}\big(F(x)-F(c)\big) + \lim_{x\searrow a}\big(F(c)-F(x)\big) \underset{\substack{\uparrow\\ F(c)\text{ hebt sich weg}}}{=} \lim_{x\nearrow b}F(x) - \lim_{x\searrow a}F(x).\end{aligned}$$

■

Beispiel.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{nach der Tabelle auf Seite 187 ist }\arctan(x)\text{ Stammfunktion von }\frac{1}{1+x^2}}}{=} \lim_{x\to\infty}\arctan(x) - \lim_{x\to-\infty}\arctan(x) \;=\; \tfrac{\pi}{2}-\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) \;=\; \pi.$$



Im Folgenden werden wir noch die Konvergenz von Reihen und von uneigentlichen Integralen in Verbindung bringen.

Satz 17.3. (Integral-Vergleichskriterium) *Es sei $f\colon [1,\infty)\to[0,\infty)$ eine stetige Funktion, welche* monoton fallend *ist. Dann gilt*

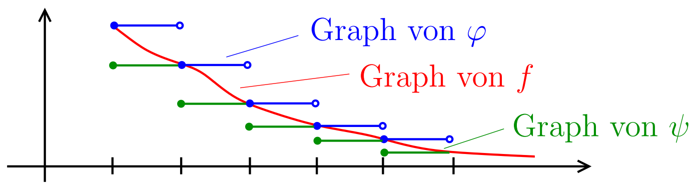
$$\sum_{n\geq 1} f(n) \quad \textit{konvergiert} \quad\Longleftrightarrow\quad \textit{das uneigentliche Integral } \int_1^\infty f(x)\,dx \textit{ ist endlich.}$$

Beweisskizze. Es sei $f\colon [1,\infty)\to\mathbb{R}$ eine stetige, monoton fallende Funktion. Wir betrachten die Funktionen

$$\begin{aligned}\varphi\colon [1,\infty) &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(\lfloor x\rfloor)\end{aligned} \qquad\text{und}\qquad \begin{aligned}\psi\colon [1,\infty) &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(\lfloor x\rfloor+1)=\varphi(x+1).\end{aligned}$$

[104] Man kann leicht mithilfe von Lemma 15.6 zeigen, dass die Definition nicht von der Wahl von $c\in(a,b)$ abhängt.

Da f monoton fallend ist, und da $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$ gilt $\varphi(x) \geq f(x) \geq \psi(x)$ für alle $x \in [1, \infty)$.



Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \; = \; \int_1^{\infty} \varphi(x)\,dx \; \underset{\uparrow}{\geq} \; \int_1^{\infty} f(x)\,dx \; \underset{\uparrow}{\geq} \; \int_1^{\infty} \psi(x)\,dx \; = \; \sum_{n=2}^{\infty} f(n).$$

folgt aus $\varphi \geq f \geq \psi$ und der Monotonieeigenschaft 15.5 des Integrals

Wir beweisen zuerst die "$\Leftarrow$"-Richtung. Wenn $\int_1^\infty f(x)\,dx$ endlich ist, dann folgt aus den Ungleichungen, der Monotonie von f und Satz 4.3, dass die Reihe $\sum\limits_{n\geq 2} f(n)$ konvergiert. Damit konvergiert aber auch die Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} f(n)$.

Wir beweisen nun die "$\Rightarrow$"-Richtung. Wenn $\sum\limits_{n\geq 1} f(n)$ konvergiert, dann folgt aus den Ungleichungen und dem Analogon von Satz 4.3 für Grenzwerte von monoton steigenden Funktionen, dass der Grenzwert $\lim\limits_{d\to\infty} \int_1^d f(x)\,dx = \int_1^\infty f(x)\,dx$ endlich ist. ∎

Beispiel. Es sei $s \in (0, \infty)$. Wir sehen:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{s}} \quad \text{konvergiert} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 17.3}}}{\iff} \quad \int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^{s}} \quad \text{ist endlich} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 17.1}}}{\iff} \quad s > 1.$$

Wir können daraus folgende Schlüsse ziehen:

(1) Wir erhalten einen neuen Beweis der Aussage, dass die Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, und dass die harmonische Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ divergiert.

(2) Wir sehen jetzt auch, dass für jedes $s \in (1, \infty)$ die Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ konvergiert. Diese Aussage hat nichts mit Integralen zu tun, aber zumindest für $s \in (1, 2)$ ist es sehr schwierig die Aussage, ohne Zuhilfenahme von Integralen zu beweisen.

(3) Wir sehen also insbesondere, dass für jedes $\epsilon > 0$ die Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$ konvergiert. Mit anderen Worten, die harmonische Reihe "divergiert gerade so eben".

18. Die Gamma-Funktion (∗)

In diesem Kapitel wollen wir die Gamma-Funktion einführen und einige Eigenschaften der Gamma-Funktion beweisen. Dieses Kapitel ist nicht Teil der Analysis-Vorlesung. Aber es kann nichtsdestotrotz interessant sein, dieses Kapitel zu lesen, weil es eine gute Gelegenheit bietet, das Gelernte zu trainieren und anzuwenden.

In diesem Kapitel werden wir unter anderem folgendes Lemma beweisen.

Lemma 18.1. *Für jedes $s > 0$ konvergiert das uneigentliche Integral*

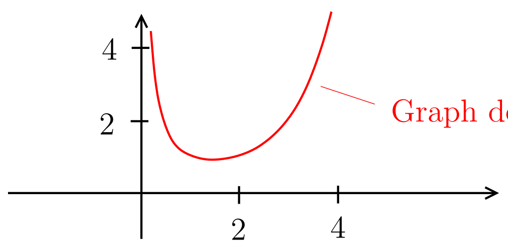
$$\int_0^\infty t^{s-1} \cdot e^{-t}\, dt.$$

Wir verschieben den Beweis des Lemmas auf etwas später. Mithilfe des Lemmas können wir nun schon einmal den Hauptdarsteller des Kapitels einführen.

Definition. Wir bezeichnen

$$\begin{array}{rcl} \Gamma\colon (0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt \end{array}$$

als die *Gamma-Funktion*.



In diesem Kapitel werden wir zudem den folgenden Satz beweisen, welcher einige der wichtigsten Eigenschaften der Gamma-Funktion zusammenfasst.

Satz 18.2.
(1) $\Gamma(1) = 1$,
(2) *für alle $x \in (0,\infty)$ gilt* $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$,
(3) *für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:* $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Bemerkung. Satz 18.2 besagt also, dass man die Gamma-Funktion als Erweiterung der Fakultät $n!$ von natürlichen Zahlen auf beliebige positive reelle Zahlen auffassen kann.

Wir werden nun im Folgenden Lemma 18.1 und Satz 18.2 beweisen. Für den Beweis von Lemma 18.1 benötigen wir dabei den folgenden Satz, welchen man mithilfe von Lemma 15.5 leicht beweisen kann. Wir überlassen den Beweis als freiwillige Übungsaufgabe.

Satz 18.3. (Majoranten-Kriterium für uneigentliche Integrale) *Es seien im Folgenden $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen gegeben, wobei $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Nehmen wir* *an, es gibt ein $C \in \mathbb{R}$, so dass*

$$g(x) \;\geq\; |f(x)| \qquad \text{für alle } x \in [C, b).$$

Dann gilt folgende Aussage für uneigentliche Integrale:

$$\int_a^b g(x)\,dx \text{ konvergiert} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \text{ konvergiert.}$$

Eine analoge Aussage gilt auch für uneigentliche Integrale von Funktionen, welche auf einem halb-offenen Intervall der Form $(a, b]$ definiert sind.

Beispiel. Wir betrachten das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{x+10}{x^3+x^2+2+\arctan(x)}\,dx.$$

Man kann leicht zeigen, dass $\frac{x+10}{x^3+x^2+2+\arctan(x)} \leq \frac{2}{x^2}$ für alle $x \in [5, \infty)$. Es folgt also aus Lemma 17.1 und aus Satz 18.3, dass das obige uneigentliche Integral konvergiert.

Mithilfe von Satz 18.3 können wir nun Lemma 18.1 beweisen.

Beweis von Lemma 18.1. Es sei also $s > 0$ gegeben. Die Funktion $t^{s-1} \cdot e^{-t}$ ist nur auf dem Intervall $(0, \infty)$ definiert. Per Definition des uneigentlichen Integrals gilt

$$\int_0^\infty t^{s-1} \cdot e^{-t}\,dt \;=\; \underbrace{\int_0^1 t^{s-1} \cdot e^{-t}\,dt}_{\text{uneigentliches Integral (1)}} \;+\; \underbrace{\int_1^\infty t^{s-1} \cdot e^{-t}\,dt}_{\text{uneigentliches Integral(2)}}$$

wenn beide uneigentlichen Integrale rechts existieren. Wir müssen nun also zeigen, dass beide uneigentliche Integrale in der Tat existieren.

(1) Wir starten mit dem ersten uneigentlichen Integral. Für alle $t \in (0, 1]$ gilt $e^{-t} \in (0, 1]$, also gilt $t^{s-1} \cdot e^{-t} \leq t^{s-1}$. Nach Satz 18.3 genügt es zu zeigen, dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 t^{s-1}\,dt$ konvergiert. Dieses wiederum bestimmen wir wie folgt:

$$\int_0^1 t^{s-1}\,dt \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Satz 16.4 und der Tabelle auf Seite 187}}}{=}\; \lim_{d \searrow 0} \left[\frac{t^s}{s}\right]_{t=d}^{t=1} \;=\; \lim_{d \searrow 0} \left(\frac{1}{s} - \frac{d^s}{s}\right) \;=\; \frac{1}{s}.$$

Wir zeigen nun, dass auch das zweite uneigentliche Integral $\int_1^\infty t^{s-1} \cdot e^{-t}\,dt$ existiert. Wir beweisen zuerst folgende Behauptung:

Behauptung. Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$, so dass für alle $t \geq C$ gilt:

$$t^{s-1} \cdot e^{-t} \;\leq\; \frac{1}{t^2}.$$

Auf Seite 171 hatten wir mithilfe der Regel von l'Hôpital gesehen, dass

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{s-1} \cdot e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} \;=\; \lim_{t\to\infty} \frac{t^{s+1}}{e^t} \;=\; 0.$$

Wenden wir die Definition von $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0$ auf $\epsilon = 1$ an, sehen wir, dass es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $t \geq C$ gilt: $t^{s-1} \cdot e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}$. ⊞

Wir hatten in Lemma 17.1 gezeigt, dass das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$ konvergiert. Es folgt dann wieder aus Satz 18.3, dass auch $\int_1^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt$ konvergiert. ■

Wir werden uns nun dem Beweis von Satz 18.2 zu.

Beweis von Satz 18.2. Wir hatten schon auf Seite 197 gesehen, dass gilt:

$$\Gamma(1) \;=\; \int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx \;=\; \lim_{d\to\infty} \int\limits_0^d e^{-x}\,dx \;=\; \lim_{d\to\infty} \big[-e^{-x}\big]_0^d \;=\; \lim_{d\to\infty} (e^{-d}+1) \;=\; 1.$$

Wir wenden uns nun dem Beweis der zweiten Aussage des Satzes zu. Für $a, b \in (0,\infty)$ folgt mithilfe von partieller Integration, dass

$$\int\limits_a^b t^x \cdot e^{-t}\,dt \overset{p.\ I.}{=} \big[t^x \cdot (-e^{-t})\big]_{t=a}^{t=b} - \int\limits_a^b x \cdot t^{x-1} \cdot (-e^{-t})\,dt.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int\limits_0^\infty t^x \cdot e^{-t}\,dt \overset{\substack{\text{Definition des uneigentlichen Integrals}\\ \downarrow}}{=} \lim_{a\searrow 0} \int\limits_a^1 t^x \cdot e^{-t}\,dt + \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^b t^x \cdot e^{-t}\,dt \overset{\substack{\text{obige Nebenrechnung}\\ \downarrow}}{=} \\
&= \lim_{a\searrow 0} \Big(\big[-t^x \cdot e^{-t}\big]_{t=a}^{t=1} + x \cdot \int\limits_a^1 t^{x-1} \cdot e^{-t}\,dt \Big) + \lim_{b\to\infty} \Big(\big[-t^x \cdot e^{-t}\big]_{t=1}^{t=b} + x \cdot \int\limits_1^b t^{x-1} \cdot e^{-t}\,dt \Big) \\
&= \underbrace{-\lim_{a\searrow 0} (-a^x \cdot e^{-a})}_{=0} + \underbrace{\lim_{b\to\infty} -b^x \cdot e^{-b}}_{\substack{=0,\text{ nach l'Hôpital}\\ \text{siehe Seite 171}}} + x \cdot \int\limits_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\,dt \\
&= x \cdot \int\limits_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\,dt \;=\; x \cdot \Gamma(x).
\end{aligned}$$

Wir haben damit die zweite Aussage bewiesen.

Die letzte Aussage des Satzes folgt nun aus (1) und (2) durch Induktion. ■

19. Funktionenfolgen (∗)

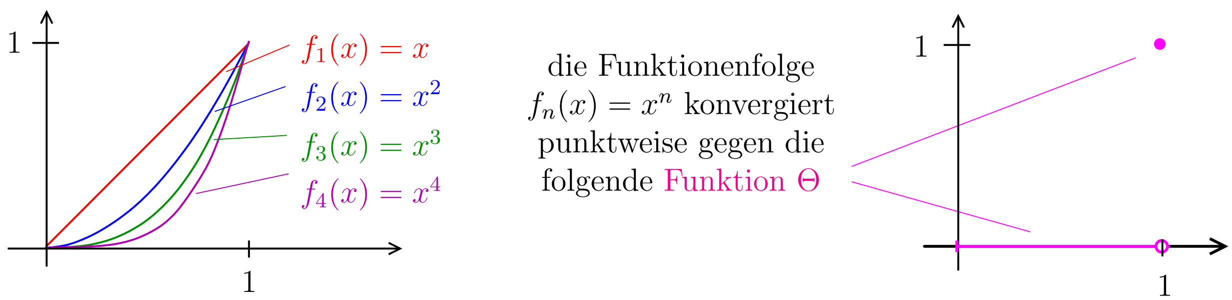
19.1. **Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen.**

Beispiel. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktion $\begin{array}{rcl} f_n\colon [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n. \end{array}$

Für jedes einzelne $x \in [0,1]$ erhalten wir also die Folge $f_n(x) = x^n$. Hierbei gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} x^n \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Los Alamos Satz 3.9}}}{=}\; \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \in [0,1), \\ 1, & \text{wenn } x = 1. \end{cases}$$

Wir bezeichnen die Funktion rechts mit Θ.



Dieses Beispiel führt uns zu folgender Definition.

Definition. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und es sei $(f_n\colon D \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen. Wir sagen die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist *punktweise konvergent*, wenn für jedes $x \in D$ die Zahlenfolge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. In diesem Fall nennen wir die Funktion

$$\begin{array}{rcl} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \end{array}$$

die *Grenzfunktion der Funktionenfolge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel.

(1) Wir hatten gerade gesehen, dass die obige Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$ auf dem Intervall $[0,1]$ punktweise konvergiert. Die Grenzfunktion ist die Funktion Θ, welche gegeben ist durch $\Theta(x) = 0$ für $x \in [0,1)$ und $\Theta(1) = 1$.

(2) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktion $\begin{array}{rcl} f_n\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}. \end{array}$

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen die Funktion

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \;=\; \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} \;=\; \exp(x). \end{array}$$

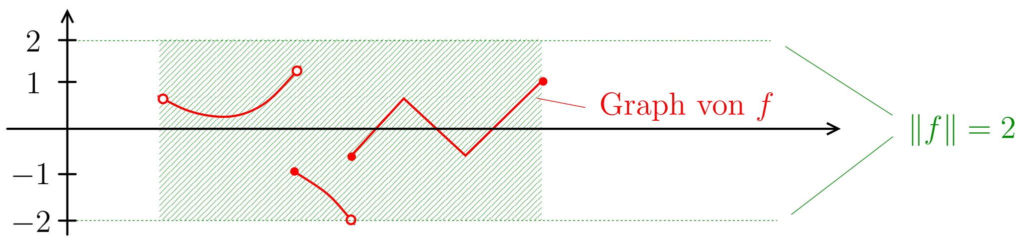
Wir sehen also, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Exponentialfunktion konvergiert.

Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge, welche punktweise konvergiert. Das erste Beispiel zeigt, dass aus der Stetigkeit der Funktionen f_n nicht notwendigerweise folgt, dass auch die Grenzfunktion stetig ist. Unser Ziel ist nun ein Kriterium für Funktionenfolgen zu finden, welches garantiert, dass die Grenzfunktion einer Folge von stetigen Funktionen wiederum stetig ist. Wir führen dazu folgende Definition ein:

Definition. Es sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir bezeichnen [105]

$$\|f\| := \sup\big\{|f(x)|\,\big|\,x \in D\big\} \quad \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

als die *Supremumsnorm von f.*



Lemma 19.1. *Es seien $\varphi, \psi\colon D \to \mathbb{R}$ Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

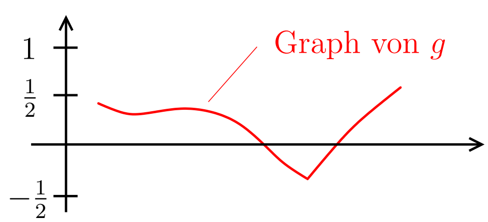
$$\begin{array}{lrcll} (1) & \|\varphi + \psi\| & \leq & \|\varphi\| + \|\psi\| & (\textit{Dreiecksungleichung}) \\ (2) & \|\lambda \cdot \varphi\| & = & |\lambda| \cdot \|\varphi\| & \end{array}$$

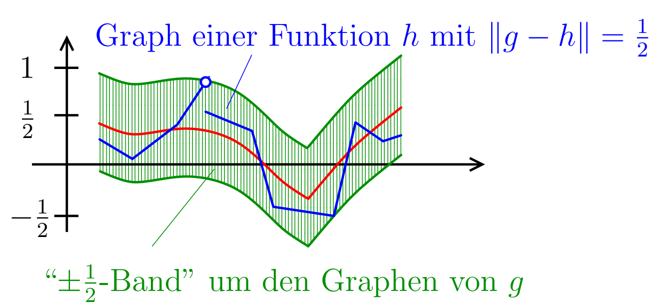
zudem gilt für jedes $x \in D$, dass

$$(3) \qquad |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|.$$

Beweis. Das Lemma folgt ziemlich leicht aus den Definitionen und wir überlassen den Beweis als freiwillige Übungsaufgabe. ∎

Beispiel. Es seien $g, h\colon D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen und $d \geq 0$. Wenn $\|g - h\| \leq d$, dann "bewegt" sich der Graph h in dem "$\pm d$-Band" um den Graphen der Funktion g.





[105] Für eine nach oben unbeschränkte Menge M schreiben wir hier $\sup(M) = \infty$.

Zur Erinnerung, auf Seite 32 hatten wir für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen folgende Definition eingeführt:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } a \in \mathbb{R} \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall}\ |a_n - a| < \epsilon.$$

Mit fast der gleichen Definition führen wir nun ganz analog den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz einer Folge von Funktionen ein.

Definition. Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n \colon D \to \mathbb{R}$. Wir definieren

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gleichmäßig gegen } f\colon D \to \mathbb{R} \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall}\ \|f_n - f\| < \epsilon.$$

Beispiel.

(1) Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktion $f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \sin(x)$ auf $\mathbb{R}$. Es gilt $\|f_n\| = \frac{1}{n}$, und wir sehen, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.

(2) Wir betrachten noch einmal die Funktionen $f_n(x) = x^n$ auf $[0,1]$. Diese Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen die Funktion Θ. Aber für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\|f_n - \Theta\| = 1$, also konvergiert die Funktionenfolge *nicht* gleichmäßig gegen Θ.

Lemma 19.2. *Jede gleichmäßig konvergente Funktionenfolge konvergiert auch punktweise.*

Beweis. Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n \colon D \to \mathbb{R}$, welche gleichmäßig gegen f konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert. Es sei also $x \in D$. Wir müssen also zeigen

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall}\ \|f_n - f\| < \epsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall}\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Diese Implikation folgt leicht aus folgender Beobachtung:

$$|f_n(x) - f(x)| \; = \; |(f_n - f)(x)| \; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Lemma 19.1 (3) angewandt auf } \varphi = f_n - f}}{\leq} \; \|f_n - f\|.$$

■

Der folgende Satz zeigt nun, dass sich gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen "im Grenzwert" deutlich besser verhalten als beliebige Funktionenfolgen.

Satz 19.3. *Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge stetiger Funktionen auf $D \subset \mathbb{R}$. Wenn diese Funktionenfolge* gleichmäßig *gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert, dann ist die Grenzfunktion f ebenfalls stetig*

Beweis. Es sei also $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge stetiger Funktionen, welche gleichmäßig gegen $f\colon D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Wir müssen zeigen, dass f stetig ist. Es sei also $x_0 \in D$ und es sei zudem $\epsilon > 0$ gegeben. Wir müssen nun zeigen, es existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| \; < \; \epsilon \qquad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D.$$

Die Voraussetzungen besagen, dass wir Kontrolle über $|f(x) - f_n(x)|$ für alle $x \in D$ zugleich haben (hier benützen wir die gleichmäßige Konvergenz und Lemma 19.1 (3)), und dass wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ Kontrolle über $|f_n(x) - f_n(x_0)|$ erhalten (wegen der Stetigkeit der Funktionen f_n). Mithilfe folgender Abschätzung können wir dann diese Informationen auf unsere Problemstellung anwenden:

$$|f(x) - f(x_0)| \;\le\; |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Die Idee ist nun, $n \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ so geschickt zu wählen, dass alle drei Terme jeweils kleiner als $\frac{\epsilon}{3}$ sind.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\text{(A)} \qquad |f(y) - f_n(y)| \;<\; \tfrac{\epsilon}{3} \qquad \text{für alle } y \in D.$$

Wegen der Stetigkeit von f_n existiert zudem ein $\delta > 0$, so dass

$$\text{(B)} \qquad |f_n(x) - f_n(x_0)| \;<\; \tfrac{\epsilon}{3} \qquad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$$

Dann gilt für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$, dass

$$|f(x) - f(x_0)| \;\le\; \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\frac{\epsilon}{3}\text{ wegen (A)}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{<\frac{\epsilon}{3}\text{ wegen (B)}} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{<\frac{\epsilon}{3}\text{ wegen (A)}} \;<\; \epsilon.$$

■

19.2. **Kriterien für die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen.** Wir haben also gesehen, dass es wichtig ist, mit gleichmäßig konvergenten Funktionenfolgen zu arbeiten. Allerdings wollen wir eher ungern für eine gegebene Funktionenfolge "per Hand" überprüfen, ob diese tatsächlich gleichmäßig konvergiert. Wir werden deshalb im Folgenden verschiedene Kriterien beweisen, welche garantieren, dass eine gegebene Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert.

Folgende Definition ist ein Analogon der Definition auf Seite 51.

Definition. Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen auf $D \subset \mathbb{R}$. Wir definieren

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Cauchy-Folge} \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n,m\ge N}{\forall}\ \|f_n - f_m\| < \epsilon.$$

Satz 19.4. (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz)

(1) *Jede gleichmäßig konvergente Funktionenfolge ist eine Cauchy-Folge.*
(2) *Jede Cauchy-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $D \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$.*

Beweis.

(1) Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen, welche gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Mithilfe von Lemma 19.1 (1) und (2) können wir wort-wörtlich den Beweis von Satz 4.1 übernehmen, um zu zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Der Vollständigkeit halber führen wir das Argument. Wir müssen also zeigen:

$$\underset{\mu>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\ge N}{\forall}\ \|f_n - f\| < \mu \qquad \Longrightarrow \qquad \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n,m\ge N}{\forall}\ \|f_n - f_m\| < \epsilon.$$

Es sei also $\epsilon > 0$. Wir wählen ein $N \in \mathbb{N}$, welches für $\mu = \frac{\epsilon}{2}$ die linke Eigenschaft besitzt. Dann gilt für alle $m, n \geq N$, dass

$$\|f_n - f_m\| \;=\; \|f_n - f + f - f_m\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Lemma 19.1 (1) und (2)}}}{\leq} \|f_n - f\| + \|f_m - f\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } m,n \geq N}}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \;=\; \epsilon.$$

(2) Es sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von Funktion auf $D \subset \mathbb{R}$. Ganz analog zum Beweis von Lemma 19.2 sieht man, dass dann für jedes x die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von reellen Zahlen ist. Insbesondere existiert für jedes x der Grenzwert $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Wir zeigen nun, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen diese Grenzfunktion f konvergiert.

Sei also $\epsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt $\|f_n - f_m\| < \frac{\epsilon}{2}$. Insbesondere gilt für alle $n \geq N$, dass

$$\begin{aligned}\|f - f_n\| &= \sup\left\{ \left| f(x) - f_n(x) \right| \,\middle|\, x \in D \right\} \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus } f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)}}{=} \sup\left\{ \left| \lim_{m\to\infty} \underbrace{(f_m(x) - f_n(x))}_{\substack{\text{für } m \geq N \text{ gilt nach Lemma 19.1 (3)} \\ |f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\| < \frac{\epsilon}{2}}} \right| \,\middle|\, x \in D \right\} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.\end{aligned}$$

■

Ganz analog zum Begriff der Reihen von reellen Zahlen, welchen wir auf Seite 47 eingeführt hatten, definieren wir nun den Begriff der Reihen von Funktionen ein.

Definition. Es sei $(g_k)_{k\geq w}$ eine Folge von Funktionen auf $D \subset \mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit

$$\sum_{k\geq w} g_k \;:=\; \text{die Folge der Partialsummen } \sum_{k=w}^{n} g_k \quad \text{mit } n = w, w+1, \ldots$$

als die zugehörige *Funktionenreihe.*

Wir erhalten nun folgendes Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz von Reihen.

Satz 19.5. (Majoranten-Kriterium für Funktionenreihen) *Es sei $(g_k\colon D \to \mathbb{R})_{k\geq w}$ eine Folge von Funktionen. Wenn es eine konvergente Reihe $\sum\limits_{k\geq w} b_k$ von reellen Zahlen gibt, so dass*

$$\|g_k\| \;\leq\; b_k \quad \text{für alle } k \geq w,$$

dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum\limits_{k\geq w} g_k$ gleichmäßig.

Beweis. Der Beweis dieser Aussage ist Wort für Wort fast der Gleiche wie der Beweis des Majoranten-Kriteriums 6.8. Der Vollständigkeit halber führen wir das Argument jedoch aus.

Um die Notation zu vereinfachen nehmen wir an, dass $w = 0$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ betrachten wir die Partialsummen

$$s_n \;:=\; \sum_{k=0}^{n} g_k \qquad \text{und} \qquad t_n \;:=\; \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Nachdem eine (Funktionen-) Reihe genau dann konvergiert, wenn die Partialsummen eine Cauchy-Folge bilden müssen wir also folgende Aussage beweisen:

$$\|g_n\| \leq b_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n,m\geq N}{\forall} |t_n - t_m| < \epsilon \implies \underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n,m\geq N}{\forall} \|s_n - s_m\| < \epsilon.$$

Es sei also $\epsilon > 0$ gegeben. Nach Voraussetzung existiert ein $N \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle $n \geq m \geq N$ gilt $|t_n - t_m| < \epsilon$. Dann gilt aber auch für alle $n \geq m \geq N$, dass

$$\|s_n - s_m\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{alle anderen Terme} \\ \text{heben sich weg}}}{=} \left\| \sum_{k=m+1}^{n} g_k \right\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungleichung} \\ \text{siehe Lemma 19.1 (1)}}}{\leq} \sum_{k=m+1}^{n} \|g_k\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Voraussetzung}}}{\leq} \sum_{k=m+1}^{n} b_k = |t_n - t_m| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wahl von } N}}{<} \epsilon.$$

■

Wir können jetzt einen neuen Beweis von Satz 7.8 geben.

Satz. 7.8. *Die Exponentialfunktion* $\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$ *ist stetig.*

Beweis. Wir müssen also zeigen, dass die Exponentialfunktion in jedem beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist. Wir wählen ein $a > 0$, so dass $x_0 \in (-a, a)$. Es genügt zu zeigen, dass die Einschränkung von exp auf das Intervall $(-a, a)$ stetig ist. Nachdem alle Partialsummen $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ stetig sind, folgt nun aus Satz 19.3, dass es genügt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Die Funktionenreihe $\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert gleichmäßig auf $(-a, a)$.

Wir setzen $g_k(x) = \frac{x^k}{k!}$. Wir wollen nun mithilfe des Majoranten-Kriteriums 19.5 zeigen, dass die Funktionenreihe $\sum_{k\geq 0} g_k$ auf dem Intervall $(-a, a)$ gleichmäßig konvergiert.

Wir wählen ein $K \in \mathbb{N}$, so dass $K \geq 2|a|$. Dann gilt für alle $k \geq K$ und $x \in (-a, a)$, dass

$$\begin{aligned} |g_k(x)| &= |g_K(x)| \cdot \left| \frac{g_k(x)}{g_K(x)} \right| = \left| \frac{x^K}{K!} \right| \left| \frac{x^k \cdot K!}{x^K \cdot k!} \right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } |x| < a}}{\leq} \frac{a^K}{K!} \left| \frac{x^{k-K}}{(K+1) \cdot \dots \cdot k} \right| = \frac{a^K}{K!} \cdot \underbrace{\frac{|x|}{K+1}}_{\leq \frac{a}{K} < \frac{1}{2}} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{|x|}{k}}_{\leq \frac{a}{K} < \frac{1}{2}} \\ &< \frac{a^K}{K!} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-K} \end{aligned}$$

Daraus folgt insbesondere, dass $\|g_k\| \leq \frac{a^K}{K!} \cdot (\frac{1}{2})^{k-K}$. Da die geometrische Reihe $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-K}$ konvergiert, folgt nun aus dem Majoranten-Kriterium 19.5, dass die Funktionenreihe $\sum_{k\geq K} g_k$ gleichmäßig konvergiert. Also konvergiert auch die Funktionenreihe $\sum_{k\geq 0} g_k$ gleichmäßig. ■

19.3. **Integrale und Funktionenfolgen.** Es sei $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von integrierbaren Funktionen, welche punktweise gegen eine integrierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Es stellt sich die Frage, ob dann ganz allgemein gilt, dass

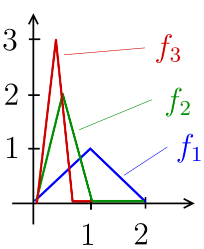
$$\int\limits_a^b \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{=f(x)}\, dx \overset{???}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\, dx.$$

Mit anderen Worten, kann man Grenzwertbildung und Integral vertauschen? Das folgende Beispiel zeigt, dass das im Allgemeinen nicht der Fall ist.

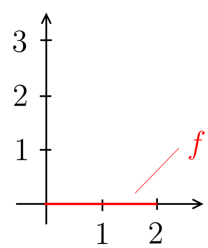
Beispiel. Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche in der Abbildung unten skizziert wird. Jede dieser Funktionen ist stetig mit Integral $\int_0^2 f_n(x)\, dx = 1$. Andererseits konvergiert diese Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Funktion $f(x) = 0$. In diesem Fall gilt also, dass

$$\int\limits_0^2 f(x)\, dx \;=\; 0 \;\neq\; 1 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^2 f_n(x)\, dx.$$

Folge von Funktionen f_n wobei $\int_0^2 f_n(x)\, dx = 1$ für alle n



die Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion



Der folgende Satz besagt nun, dass dieses Problem wiederum dadurch umgangen werden kann, dass man sich auf gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen einschränkt.

Satz 19.6. (Konvergenz-Satz für Integrale) *Es sei $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen, welche* gleichmäßig *gegen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Wenn alle Funktionen f_n integrierbar sind, dann ist auch f integrierbar, und es gilt*

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\, dx.$$

Im Beweis von Satz 19.6 werden wir folgendes Lemma verwenden.

Lemma 19.7. *Es sei $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt für jede Zerlegung Z von $[a,b]$, dass*

$$|O(g,Z)| \;\leq\; \|g\| \cdot (b-a).$$

Zudem, wenn g integrierbar ist, dann gilt

$$\left| \int\limits_a^b g(x)\, dx \right| \;\leq\; \|g\| \cdot (b-a).$$

Beweis von Lemma 19.7. Für $x \in [a,b]$ gilt nach Lemma 19.1 (3), dass $g(x) \in [-\|g\|, \|g\|\,]$. Die erste Aussage folgt nun leicht aus den Definitionen. Die zweite Aussage folgt direkt aus der ersten Aussage. ■

Wir können jetzt Satz 19.6 beweisen.

Beweis von Satz 19.6.

> Nach Satz 15.2 genügt es, eine Folge von Zerlegungen $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $[a,b]$ zu finden, so dass die dazugehörigen Unter- und Obersummen von f gegen $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$ konvergieren. Die Idee ist nun für jedes k eine Zerlegung "für f_k" zu nehmen, so dass für große k die Zerlegungen "immer besser werden".

Wir konstruieren nun eine Folge von Zerlegungen $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie folgt. Es sei $k \in \mathbb{N}$. Nachdem f_k integrierbar folgt aus Satz 15.2, dass es eine Zerlegung Z_k von $[a,b]$ gibt, so dass

$$\left|O(f_k, Z_k) - \int_a^b f_k(x)\,dx\right| \;<\; \frac{1}{k} \qquad \text{und} \qquad \left|U(f_k, Z_k) - \int_a^b f_k(x)\,dx\right| \;<\; \frac{1}{k}.$$

Nach Satz 15.2 genügt es nun folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Es ist

$$\lim_{k\to\infty} U(f, Z_k) \;=\; \lim_{k\to\infty} O(f, Z_k) \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Wir werden jetzt zeigen, dass $\lim\limits_{k\to\infty} O(f, Z_k) \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$. Die Aussage über den Grenzwert der Untersummen wird dann ganz analog bewiesen.

Wir beginnen mit einer Abschätzung. Für beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\begin{aligned}
&\left|O(f, Z_k) - \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\right| \\
\le\; &\left|O(f, Z_k) - O(f_k, Z_k)\right| + \left|O(f_k, Z_k) - \int_a^b f_k(x)\,dx\right| + \left|\int_a^b f_k(x)\,dx - \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx\right| \\
=\; &\underbrace{\left|O(f - f_k, Z_k)\right|}_{\substack{\le \|f - f_k\|\cdot|b-a| \\ \text{nach Lemma 19.7}}} + \underbrace{\left|O(f_k, Z_k) - \int_a^b f_k(x)\,dx\right|}_{< \frac{1}{k}} + \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left|\int_a^b f_k(x) - f_n(x)\,dx\right|}_{\substack{\le \|f_n - f_k\|\cdot|b-a| \\ \text{nach Lemma 19.7}}}.
\end{aligned}$$

Es sei nun $\epsilon > 0$. Wir wollen jetzt zeigen, dass für genügend große k alle drei Summanden $< \frac{\epsilon}{3}$ sind.

Nachdem die Funktionenfolge $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert, gibt es ein K_1, so dass $\|f - f_k\| < \frac{\epsilon}{6|b-a|}$ für alle $k \ge K_1$. Nach Satz 19.4 gibt es zudem ein $K_2 \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_n - f_k\| < \frac{\epsilon}{6|b-a|}$ für alle $n, k \ge K_2$. Für alle $k \ge \max\{K_1, \frac{3}{\epsilon}, K_2\}$ gilt dann, dass

$$\begin{aligned}&\left|O(f,Z_k)-\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx\right|\\=\ &\underbrace{\Big|O(f-f_k,Z_k)\Big|}_{\le\frac{\epsilon}{6},\text{ da }k\ge K_1}+\underbrace{\left|O(f_k,Z_k)-\int\limits_a^b f_k(x)\,dx\right|}_{<\frac{\epsilon}{3},\text{ da }k\ge\frac{3}{\epsilon}}+\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left|\int\limits_a^b f_k(x)-f_n(x)\,dx\right|}_{\le\frac{\epsilon}{6},\text{ da }k\ge K_2}\le\ \frac{\epsilon}{6}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{6}\ <\ \epsilon\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass $\lim\limits_{k\to\infty}O(f,Z_k)=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx$. ■

20. Potenzreihen

20.1. **Definition von Potenzreihen.**

Definition. Es sei $w \in \mathbb{N}_0$ und es sei $(c_n)_{n\geq w}$ eine Folge von *komplexen Zahlen* und es sei $a \in \mathbb{C}$. Eine *Potenzreihe* ist ein formaler Ausdruck von der Form

$$\sum_{n\geq w} c_n \cdot (z-a)^n,$$

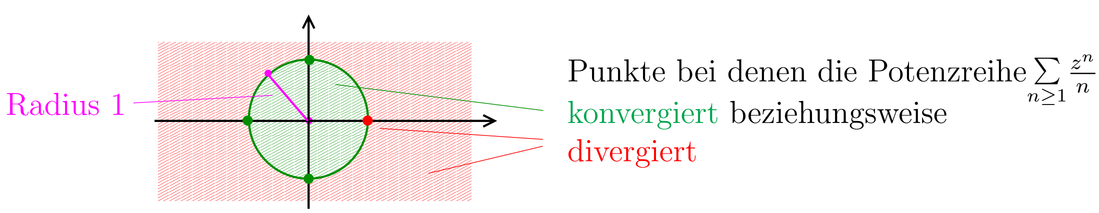
wobei z eine Variable ist.

Wir interessieren uns im Folgenden für die Menge der komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für welche eine gegebene Potenzreihe konvergiert.

Beispiel.

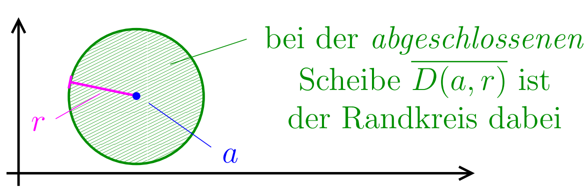
(1) Wir betrachten die Potenzreihe $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt:
   (a) Wenn $|z| < 1$, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$ nach dem Quotientenkriterium.
   (b) Wenn $|z| \geq 1$, dann ist $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$, keine Nullfolge, das heißt die Reihe divergiert.

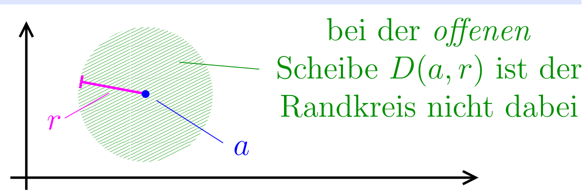
(2) Betrachten wir die Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$. Es sei $z \in \mathbb{C}$.
   (a) Wenn $|z| < 1$ dann konvergiert die Potenzreihe nach dem Quotientenkriterium.
   (b) Wenn $|z| > 1$ dann divergiert die Reihe, nachdem $\frac{z^n}{n}$ keine Nullfolge ist.
   (c) Für $z = 1$ erhalten wir die harmonische Reihe, welche nach Satz 6.5 divergiert.
   (d) Für $z = -1$ konvergiert die Potenzreihe nachdem Leibniz-Kriterium 6.7.
   (e) Für $z = \mathrm{i}$ ist es eine schöne Übungsaufgabe zu zeigen, dass die Reihe konvergiert.
   (f) Die Reihe konvergiert sogar für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und $z \neq 1$. Der Beweis dieser allgemeineren Aussage ist allerdings etwas kniffelig.



Notation. Es sei $a \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen

$\overline{D(a,r)}$	$:=$	$\{z \in \mathbb{C} \mid \lvert z-a\rvert \leq r\}$	als die *abgeschlossene Scheibe von Radius r um a*
$D(a,r)$	$:=$	$\{z \in \mathbb{C} \mid \lvert z-a\rvert < r\}$	die *offene Scheibe von Radius r um a.*





Auf Seite 204 hatten wir die Supremumsnorm einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ definiert. Die Definition überträgt sich problemlos auf komplexe Funktionen:

Definition. Für $D \subset \mathbb{C}$ und eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ definieren wir die Supremumsnorm

$$\|f\| \;:=\; \sup\{|f(z)|\,|\, z \in D\} \;\in\; \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen, welchen wir auf Seite 205 eingeführt hatten, überträgt sich wort-wörtlich auf komplexe Funktionen.

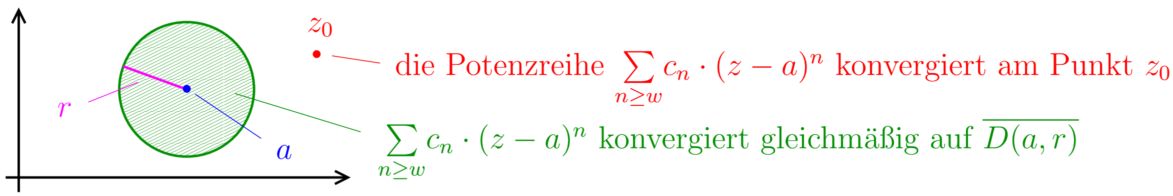
Satz 20.1. *Es sei*

$$f(z) \;=\; \sum_{n \geq w} c_n \cdot (z-a)^n$$

eine Potenzreihe, welche für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert. Für jedes $0 \leq r < |z_0 - a|$ konvergiert die Potenzreihe auf der abgeschlossenen Scheibe

$$\overline{D(a,r)} \;=\; \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z-a| \leq r \right\}$$

gleichmäßig.



Beweis. Um die Notation etwas zu vereinfachen, betrachten wir nur den Fall $a = 0$ und $w = 0$. Es sei also $f(z) \;=\; \sum_{n \geq 0} c_n \cdot z^n$ eine Potenzreihe, welche für ein $z_0 \neq 0 \in \mathbb{C}$ konvergiert. Es sei $0 \leq r < |z_0|$. Wir müssen zeigen, dass die Reihe auf $\overline{D(0,r)} \;=\; \{z \in \mathbb{C}\,|\, |z| \leq r\}$ gleichmäßig konvergiert.

Es folgt aus Satz 3.16 und der offensichtlichen Verallgemeinerung des Majoranten-Kriterium 19.5 auf komplexe Funktionen-Folgen, dass es genügt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ und ein $\theta \in [0,1)$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\| \underbrace{c_n \cdot z^n}_{\substack{\text{als Funktion} \\ \text{auf } \overline{D}(0,r)}} \| \;\leq\; C \cdot \theta^n \qquad \text{mit anderen Worten} \qquad |c_n \cdot z^n| \;\leq\; C \cdot \theta^n \quad \text{alle } z \in \overline{D(0,r)}.$$

Für $z \in \overline{D(0,r)}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist $|c_n \cdot z^n| \;=\; |c_n \cdot z_0^n| \cdot |\frac{z}{z_0}|^n$. Wir wollen jetzt also den ersten Faktor durch eine feste Zahl C abschätzen und den zweiten Term durch einen Term θ^n, wobei $\theta \in [0,1)$.

Nachdem die Reihe $\sum_{n \geq w} c_n \cdot z_0^n$ konvergiert, folgt aus Satz 6.3 zusammen mit Satz 3.3, dass die Folge $(c_n \cdot z_0^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ beschränkt ist. Es existiert also ein $C \in \mathbb{R}$, so dass

$$|c_n \cdot z_0^n| \;\leq\; C$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Setzen wir zudem $\theta := |\frac{r}{z_0}|$, dann gilt für alle $z \in \overline{D(0,r)}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$|c_n \cdot z^n| \;=\; |c_n \cdot z_0^n| \cdot \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } z \in \overline{D(0,r)}}}{\le} |c_n \cdot z_0^n| \cdot \underbrace{\left|\frac{r}{z_0}\right|^n}_{=\theta} \le C \cdot \theta^n.$$

■

20.2. **Der Konvergenzradius einer Potenzreihe.**

Definition. Es sei $f(z) = \sum\limits_{n \ge w} c_n \cdot (z-a)^n$ eine Potenzreihe. Wir bezeichnen

$$R \;:=\; \sup\left\{ |z-a| \;\middle|\; \sum_{n \ge w} c_n \cdot (z-a)^n \text{ konvergiert } \right\} \in \mathbb{R}_{\ge 0} \cup \{\infty\}$$

als den *Konvergenzradius der Potenzreihe* $f(z)$.

In folgendem Lemma bestimmen wir einige interessante Konvergenzradien.

Lemma 20.2.

(1) *Der Konvergenzradius der Reihen* $\sum\limits_{n\ge 0} z^n$ *und* $\sum\limits_{n \ge 1} \frac{z^n}{n}$ *ist eins.*

(2) *Der Konvergenzradius der Exponentialreihe* $\sum\limits_{n \ge 0} \frac{z^n}{n!}$ *ist* ∞.

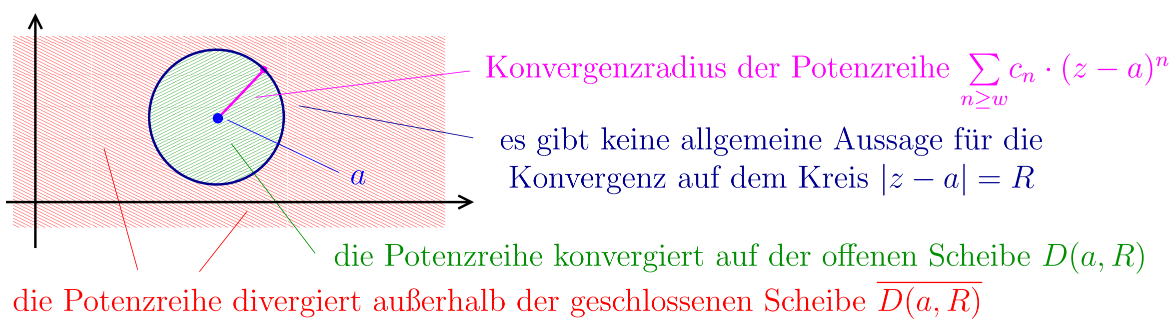
Beweis.

(1) Auf Seite 212 hatten wir gesehen, dass beide Reihen für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ konvergieren. Also ist der Konvergenzradius mindestens 1. Andererseits hatten wir auch gesehen, dass beide Reihen für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ divergieren, also ist der Konvergenzradius höchstens 1.

(2) Der Beweis von Satz 6.17 zeigt, dass die Exponentialreihe $\sum\limits_{n \ge 0} \frac{z^n}{n!}$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, also ist der Konvergenzradius ∞. ■

Lemma 20.3. *Es sei* $f(z) = \sum\limits_{n \ge w} c_n \cdot (z-a)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* R. *Für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\begin{aligned} |z-a| < R &\implies f(z) \text{ konvergiert}, \\ |z-a| > R &\implies f(z) \text{ divergiert}. \end{aligned}$$



Bemerkung. Am Beispiel der Reihe $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{z^n}{n}$ auf der Seite 212 hatten wir schon gesehen, dass wir keine allgemeine Aussage über die Konvergenz einer Reihe für komplexe Zahlen z mit $|z-a|=R$ treffen können.

Beweis.

(1) Es sei also $z\in\mathbb{C}$ mit $|z-a|<R$. Dann existiert per Definition des Konvergenzradius ein $z_0\in\mathbb{C}$ mit $|z-a|<|z_0-a|$, und so dass die Potenzreihe $f(z_0)$ konvergiert. Es folgt dann aus Satz 20.1, angewandt auf $r:=|z-a|$, dass die Potenzreihe $f(z)$ ebenfalls konvergiert.

(2) Die zweite Aussage folgt aus der Definition von R. ■

Den Begriff von Stetigkeit kann man wort-wörtlich auch für komplexe Funktionen übernehmen. Genauer gesagt, wir haben folgende Definition.

Definition. Es sei $D\subset\mathbb{C}$ eine Teilmenge, es sei $f\colon D\to\mathbb{C}$ eine Funktion und es sei $z\in D$. Wir definieren

$$f \text{ ist stetig im Punkt } z \quad :\Longleftrightarrow \quad \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{\substack{z\,\in\, D \text{ mit}\\ |w-z|<\delta}}{\forall}\ |f(w)-f(z)|<\epsilon.$$

Wir sagen $f\colon D\to\mathbb{C}$ *ist stetig*, wenn f in jedem Punkt des Definitionsbereichs stetig ist.

Wir können nun folgendes Lemma formulieren und beweisen.

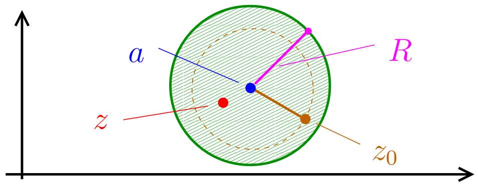
Lemma 20.4. *Es sei $f(z)=\sum\limits_{n\geq 0}c_n\cdot(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Die Funktion*

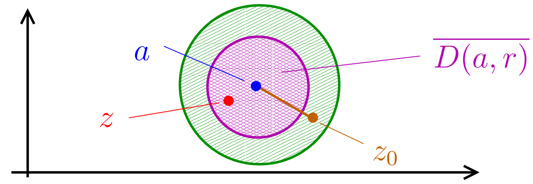
$$\begin{array}{rcl} D(a,R) & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f(z) \end{array}$$

ist stetig.

Beispiel. Lemma 20.4, zusammen mit Lemma 20.2, gibt uns einen weiteren Beweis der Stetigkeit der Exponentialfunktion. Zudem kann mit Lemma 20.4 problemlos beweisen, dass die Sinus- und die Kosinusfunktion stetig sind.

Beweis. Es sei also $z\in\mathbb{C}$ mit $|z-a|<R$. Wir wollen zeigen, dass f im Punkt z stetig ist. Per Definition des Konvergenzradius existiert ein $z_0\in\mathbb{C}$ mit $|z-a|<|z_0-a|$, und so dass die Potenzreihe $f(z_0)$ konvergiert. Wir wählen ein r mit $|z-a|<r<|z_0-a|$. Es folgt aus Satz 20.1, angewandt auf r, dass die Potenzreihe $f(z)$ auf der abgeschlossenen Scheibe $\overline{D(a,r)}$ gleichmäßig konvergiert. Es folgt dann aus der offensichtlichen Verallgemeinerung von Satz 19.3 auf komplexe Funktionen, dass f stetig ist auf der abgeschlossenen Scheibe $\overline{D(a,r)}$ ist. Nachdem $z\in D(a,r)$ folgt, dass die Funktion f im Punkt z stetig ist. ■





Im nächsten Kapitel wird folgendes etwas technische Lemma eine wichtige Rolle spielen.

Lemma 20.5. *Es sei* $f(z) = \sum_{n\geq w} c_n \cdot (z-a)^n$ *eine Potenzreihe und es sei* $k \in \mathbb{Z}$. *Es gilt:*

$$\textit{Konvergenzradius von } \sum_{n\geq w} n^k \cdot c_n \cdot (z-a)^n \quad = \quad \textit{Konvergenzradius von } \sum_{n\geq w} c_n \cdot (z-a)^n.$$

Beispiel. Wir hatten schon auf Seite 212 gesehen, dass die beiden Reihen $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \cdot z^n$ und $\sum_{n\geq 1} z^n$ den gleichen Konvergenzradius 1 besitzen. An diesem Beispiel sieht man auch, dass sich die Konvergenz auf dem Kreis $|z-a| = r$ durchaus ändern kann.

Beweis $(*)$. Um die Notation etwas zu vereinfachen, betrachten wir wieder den Spezialfall $a = 0$ und $w = 0$. Der allgemeine Fall wird ganz analog bewiesen. Es sei also $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n \cdot z^n$ eine Potenzreihe und es sei $k \in \mathbb{Z}$.

Behauptung 1. Es sei $(d_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von reellen Zahlen, so dass für alle $\theta \in [0,1)$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} d_n \cdot \theta^n = 0$. Dann gilt für jede Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von komplexen Zahlen, dass

$$\text{Konvergenzradius von } \sum_{n\geq 0} d_n \cdot s_n \cdot z^n \quad \geq \quad \text{Konvergenzradius von } \sum_{n\geq 0} s_n \cdot z^n.$$

Es folgt aus der Definition des Konvergenzradius, dass es genügt zu beweisen, dass wenn die Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} s_n \cdot z^n$ für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert, dann konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} d_n \cdot s_n \cdot z^n$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$. Es sei also solch ein $z_0 \in \mathbb{C}$ gegeben und es sei zudem $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$. Wir wählen $v, w \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |v| < |w| < |z_0|$. Dann gilt

$$\sum_{n\geq 0} d_n \cdot s_n \cdot z^n \;=\; \sum_{n\geq 0} d_n \cdot \left(\frac{z}{v}\right)^n \cdot s_n \cdot w^n \cdot \left(\frac{v}{w}\right)^n.$$

Da $\theta := \left|\frac{z}{w}\right| < 1$ folgt aus der Voraussetzung, dass $\lim_{n\to\infty} \left|d_n \cdot \left(\frac{z}{w}\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty} d_n \cdot \left|\frac{z}{w}\right|^n = 0$. Zudem konvergiert nach Voraussetzung die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} s_n \cdot w^n$, also ist auch $|s_n \cdot w^n|$ eine Nullfolge. Da $|\frac{v}{w}| < 1$ sehen wir nun, wie im Beweis von Satz 20.1, dass die Reihe $\sum_{n\geq 0} d_n \cdot s_n \cdot z^n$ konvergiert. ⊞

Behauptung 2. Die Voraussetzung von Behauptung 1 ist erfüllt für die Folge $d_n = n^k$.

Es sei $s \in [0,1)$.

(1) Wenn $k \leq 0$, dann folgt aus Satz 3.9 und Lemma 3.12, dass $\lim_{n\to\infty} n^k \cdot s^n = 0$.

(2) Wenn $k \geq 0$, dann folgt aus Regel von l'Hôpital, angewandt wie auf Seite 171, zusammen mit Lemma 14.9, dass $\lim\limits_{n\to\infty} n^k \cdot s^n = 0$. $\boxplus$

Wir erhalten nun folgende Gleichheit:

$$\text{Konvergenzradius von } \sum_{n\geq 0} n^k \cdot c_n \cdot z^n \underset{\uparrow}{=} \text{Konvergenzradius von } \sum_{n\geq 0} c_n \cdot z^n.$$

$\geq$ folgt aus Behauptung 1, angewandt auf $d_n = n^k$ und $s_n = c_n$
$\leq$ folgt aus Behauptung 1, angewandt auf $d_n = n^{-k}$ und $s_n = n^k \cdot c_n$ ■

20.3. **Ableitungen und Stammfunktionen von Potenzreihen.** Im Folgenden betrachten wir Ableitungen und Stammfunktionen von Funktionen, welche durch Potenzreihen definiert werden. Nachdem wir den Begriff der Ableitung und der Stammfunktion von komplexen Funktionen noch nicht definiert haben, werden wir von jetzt an nur noch reelle Reihen betrachten.

Der folgende Satz besagt, dass man durch Potenzreihen definierte Funktionen "naiv" ableiten und aufleiten kann.

Satz 20.6. *Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und es sei $a \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass es ein $R > 0$ gibt, so dass die Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} c_n \cdot (x-a)^n$ für alle $x \in (a-R, a+R)$ konvergiert. Dann gilt auf dem Intervall $(a-R, a+R)$:*

(1) $$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot (x-a)^{n-1} \qquad \textit{"gliedweise Ableitung"}$$

(2) $$\int \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n \, dx \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} \cdot (x-a)^{n+1} \qquad \textit{"gliedweise Aufleitung".}$$

Insbesondere konvergieren die Reihen auf der rechten Seite für alle $x \in (a-R, a+R)$.

Beispiel.

(1) Wir betrachten die Exponentialfunktion. Es gilt

$$\frac{d}{dx}\exp(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Satz 20.6}}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{x^{n-1}}{n!} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denn } \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Substitution } k=n-1}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = \exp(x).$$

Wir haben also noch einmal gezeigt, dass die Ableitung der Exponentionalfunktion wiederum die Exponentialfunktion ist.

(2) Es ist sehr amüsant mithilfe von Satz 20.6 zu zeigen, dass $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$, und dass $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$.

Beweis. Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n\geq 0} c_n \cdot (x-a)^n$. Es folgt aus Lemmas 20.3 und 20.5, dass die beiden Reihen

$$\sum_{n\geq 1} n \cdot c_n \cdot (x-a)^{n-1} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} \cdot c_n \cdot (x-a)^{n+1}$$

ebenfalls auf $(a-R,a+R)$ konvergieren.

Wir beweisen nun zuerst Aussage (2). Per Definition einer Stammfunktion müssen wir also zeigen, dass auf $(a-R,a+R)$ folgende Gleichheit gilt:

$$\frac{d}{dx}\left(x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}\cdot (x-a)^{n+1}\right) \;=\; \left(x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot (x-a)^n\right).$$

In der Tat gilt für alle $x \in (a-R,a+R)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(x-a)^n \underset{\substack{\uparrow\\ \text{per Definition}}}{=} f(x) \underset{\uparrow}{=} \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt \;=\; \frac{d}{dx}\int_a^x \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k} c_n\cdot(t-a)^n\,dt$$

die Funktion $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(x-a)^n$ ist stetig nach Lemma 20.4, die Gleichheit folgt also aus dem Hauptsatz 16.3 der Differential- und Integralrechnung

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{d}{dx}\lim_{k\to\infty}\int_a^x \sum_{n=0}^{k} c_n\cdot(t-a)^n\,dt \underset{\uparrow}{=} \frac{d}{dx}\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{k}\frac{c_n}{n+1}\cdot(t-a)^{n+1}\right]_a^x$$

nach Satz 20.1 konvergiert die Funktionenfolge $\sum_{n=0}^{k} c_n\cdot(t-a)^n$ auf dem abgeschlossenen Intervall von a bis x gleichmäßig, es folgt also aus Satz 19.6, dass wir "den Grenzwert rausziehen können" — übliche Integration von Polynomen

$$= \frac{d}{dx}\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{c_n}{n+1}\cdot(x-a)^{n+1} \;=\; \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}\cdot(x-a)^{n+1}.$$

Wir beweisen nun Aussage (1). Wir müssen also beweisen, dass ganz allgemein gilt:

(a) $$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} d_n\cdot(x-a)^n \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot d_n\cdot(x-a)^{n-1}.$$

Mit anderen Worten, wir müssen beweisen, dass

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} d_n\cdot(x-a)^n \;\doteq\; \int \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot d_n\cdot(x-a)^{n-1}\,dx.$$

Aber die umformulierte Aussage folgt sofort aus (2), angewandt auf $c_n = n\cdot d_n$. ■

Beispiel.

(1) Aus der Satz 3.16, angewandt auf $z=-x$, folgt, dass

$$\frac{1}{1+x} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n \qquad \text{für alle } x\in(-1,1).$$

Wir betrachten jetzt Stammfunktionen dieser Funktion. Aus $\frac{d}{dx}\ln(x)=\frac{1}{x}$, aus Satz 20.6 und aus Lemma 16.1 folgt, dass es ein $C\in\mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\ln(1+x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} \;+C \qquad \text{für alle } x\in(-1,1).$$

Indem wir $x=0$ einsetzen, sehen wir, dass $C=0$. Also ist

$$\ln(1+x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{für alle } x\in(-1,1).$$

Es folgt aus dem Leibniz-Kriterium 6.7, dass die Reihe auf der rechten Seite für $x = 1$ konvergiert. Es stellt sich die Frage, ob die obige Gleichheit auch für $x = 1$ gilt. Wir werden die Fragen im nächsten Teilkapitel beantworten.

(2) Aus Satz 3.16, angewandt auf $z = -x^2$, folgt auch, dass

$$\frac{1}{1+x^2} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} \qquad\qquad \text{für alle } x \in (-1,1).$$

Wir betrachten jetzt Stammfunktionenen dieser Funktion. Aus $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$, aus Satz 20.6 und aus Lemma 16.1 folgt, dass es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\arctan(x) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C \qquad \text{für alle } x \in (-1,1).$$

Indem wir wiederum $x = 0$ einsetzen, sehen wir, dass $C = 0$. Also ist

$$\arctan(x) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad\qquad \text{für alle } x \in (-1,1).$$

Es folgt wiederum aus dem Leibniz-Kriterium 6.7, dass die Reihe auf der rechten Seite für $x = -1$ und $x = 1$ konvergiert. Auch hier stellt sich die Frage, ob die obige Gleichheit auch für $x = \pm 1$ gilt, und auch dieses Mal werden wir die Frage im nächsten Teilkapitel beantworten.

20.4. Der abelsche Grenzwertsatz und seine Anwendungen.

Satz 20.7. (Abelscher Grenzwertsatz) *Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Es sei*

$$f(x) \quad = \quad \sum_{n\geq 0} c_n \cdot (x-a)^n$$

die dazugehörige Potenzreihe. Wenn die Potenzreihe f für ein $x_0 > a$ konvergiert, dann ist die Funktion $x \mapsto f(x)$ auf dem Intervall $[a, x_0]$ stetig.

Beweis. Es sei $x_0 > a$, so dass die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n\geq 0} c_n \cdot (x-a)^n$ für $x = x_0$ konvergiert. Um die Notation etwas zu vereinfachen, nehmen wir an, dass $a = 0$ und $x_0 = 1$. Der allgemeine Fall wird ganz analog bewiesen.

Wir müssen zeigen, dass die Funktion $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ stetig ist. Es folgt aus Lemma 20.4, dass die Funktion auf dem halb-offenem Intervall $[0,1)$ stetig ist. Es verbleibt also zu zeigen, dass die Funktion $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$ auch im Punkt $x = 1$ stetig ist.

Es sei also $\epsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(1) - f(x)| < \epsilon$ für alle $x \in (1-\delta, 1]$. Folgende Behauptung wird es uns erlauben $f(1) - f(x)$ in den Griff zu kriegen.

Behauptung. Für jedes $x \in [0,1)$ gilt

$$f(1) - f(x) \;=\; (1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (s - s_n) \cdot x^n, \qquad \text{wobei } s_k := \sum_{n=0}^{k} c_n \quad \text{und} \quad s := f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Wir setzen zudem $s_{-1} := 0$. Für $x \in [0,1)$ gilt dann, dass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} c_n \cdot x^n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \underbrace{(s_n - s_{n-1})}_{=c_n} \cdot x^n \overset{\substack{\text{elementare Umformung}\\ \downarrow}}{=}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(s_k \cdot x^k + (1-x) \cdot \sum_{n=0}^{k-1} s_n \cdot x^n \right) \underset{\uparrow}{=} (1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cdot x^n.$$

wir hatten vorausgesetzt, dass die Potenzreihe bei $x = 1$ konvergiert,
die Folge der Partialsummen (s_k) ist daher konvergent, insbesondere beschränkt,
da $x \in [0,1)$ ist (x^k) eine Nullfolge, also ist nach Satz 3.5 auch $s_k \cdot x^k$ eine Nullfolge

Es folgt nun, dass für jedes $x \in [0,1)$ gilt:

$$f(1) - f(x) = s \cdot \underbrace{(1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{=1,\ \text{nach Satz 3.16}} - \underbrace{(1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cdot x^n}_{=f(x),\ \text{siehe oben}} = (1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (s - s_n) \cdot x^n.$$

⊞

Nachdem $\lim_{n\to\infty} (s - s_n) = 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|s - s_n| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Für alle $x \in [0,1)$ gilt dann:

$$\left| f(1) - f(x) \right| \overset{\substack{\text{obige Behauptung}\\ \downarrow}}{=} \left| (1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (s - s_n) \cdot x^n \right| \overset{\substack{\text{Lemma 6.2}\\ \downarrow}}{=} \left| (1-x) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} (s - s_n) \cdot x^n + (1-x) \cdot \sum_{n=N}^{\infty} (s - s_n) \cdot x^n \right|$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Satz 6.10}}}{\leq} (1-x) \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} |s - s_n| \cdot x^n}_{\leq C := \sum_{n=0}^{N\text{-}1} |s - s_n|} + (1-x) \cdot \underbrace{\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\epsilon}{2} \cdot x^n}_{\leq \frac{\epsilon}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{1-x}} \leq (1-x) \cdot C + \frac{\epsilon}{2}.$$

Für $x \in (1 - \frac{\epsilon}{2C}, 1)$ gilt dann also wie erhofft, dass

$$|f(1) - f(x)| \leq (1-x) \cdot C + \frac{\epsilon}{2} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{denn } x \in (1 - \frac{\epsilon}{2C}, 1)}}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

■

Beispiel.

(1) Auf Seite 218 hatten wir gesehen, dass

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{für alle } x \in (-1,1).$$

Es folgt aus dem Leibniz-Kriterium 6.7, dass die Reihe auf der rechten Seite für $x = 1$ konvergiert. Aus der Stetigkeit der Logarithmusfunktion und aus Satz 20.7 folgt nun, dass beide Seiten stetig auf dem Intervall $[0,1]$ sind. Die obige Gleichheit setzt sich also auf $x = 1$ fort.[106] Wir sehen also, dass

$$\ln(1+x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{für alle } x \in (-1, 1].$$

Insbesondere erhalten wir also:

$$\ln(2) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Wir können die rechte Seite noch etwas umformen, und wir erhalten, dass

$$-\ln(2) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}.$$

Wir haben jetzt also den Wert eine der Reihen, welche wir mit am längsten kennen, explizit bestimmt. Die Graphen von $\ln(1+x)$ und der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$ können zudem hier betrachtet werden:

`https://www.desmos.com/calculator/7sfr2txfwd`

(2) Auf Seite 219 hatten wir gesehen, dass

$$\arctan(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \text{für alle } x \in (-1, 1).$$

Es folgt aus dem Leibniz-Kriterium 6.7, dass die Reihe auf der rechten Seite für $x = -1$ und $x = 1$ konvergiert. Aus der Stetigkeit der Arkustangensfunktion und aus Satz 20.7 folgt nun, dass beide Seiten auf $[-1, 1]$ stetig sind. Die obige Gleichheit gilt also auch für $x = -1$ und $x = 1$. Wir sehen also insbesondere, dass

$$\frac{\pi}{4} \;=\; \arctan(1) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Zur annäherungsweisen Berechnung von π ist diese Darstellung allerdings ungeeignet, weil die Reihe nur "langsam" konvergiert. Beispielsweise, wenn Sie $\frac{\pi}{4}$ bis auf sechs Stellen berechnen wollen, dann müssen Sie die Summe $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ für $n = 500.000$ berechnen.

[106] Wir verwenden hierbei folgende Tatsache: es seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Wenn f und g auf $[a, b)$ übereinstimmen, und wenn f und g stetig sind, dann gilt auch $f(b) = g(b)$.

21. Das Taylorpolynom

21.1. Höhere Ableitungen und C^∞-Funktionen. Wir erinnern zuerst an folgende harmlose Definition, welche wir auf Seite 154 eingeführt hatten.

Definition. Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall.

(1) Wenn die Ableitung f' differenzierbar ist, dann schreiben wir
$$f^{(2)} \;:=\; f'' \;:=\; (f')', \qquad \text{genannt die } \textit{2. Ableitung von } f.$$

(2) Wenn die $(n-1)$-te Ableitung von f differenzierbar ist, dann definieren wir die *n-te Ableitung von f* als
$$f^{(n)} \;:=\; (f^{(n-1)})'$$
und wir sagen, f ist *n-fach differenzierbar*.

(3) Wir erweitern die Notation $f^{(n)}$ und schreiben manchmal $f^{(0)} := f$ und $f^{(1)} := f'$.

(4) Wir sagen f ist eine *C^∞-Funktion*, wenn f beliebig oft differenzierbar ist.[107]

Beispiel.

(1) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Man kann problemlos zeigen, dass die Funktion
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} -x^{n+1}, & \text{wenn } x \le 0, \\ x^{n+1}, & \text{wenn } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$
n-fach differenzierbar ist mit $f^{(n)}(x) = (n+1)! \cdot |x|$. Nachdem $f^{(n)}(x)$ nicht differenzierbar ist, sehen wir, dass f nicht $(n+1)$-fach differenzierbar ist.

(2) Es folgt aus Lemma 12.1 und den Ableitungsregeln 12.4, dass Polynomfunktionen C^∞-Funktionen sind.

(3) Es folgt aus Satz 12.6, dass die Exponentialfunktion, die Sinusfunktion sowie die Kosinusfunktion C^∞-Funktionen sind.

(4) Es folgt aus den Ableitungsregeln 12.4, der Kettenregel 12.7 und der Umkehrregel 12.9, dass beliebige Summen, Produkte, Quotienten, Verknüpfungen und Umkehrungen von C^∞-Funktionen wieder C^∞-Funktionen sind.

21.2. Approximationen von Funktionen.

Definition. Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem offenen Intervall und es sei $x_0 \in I$. Wir sagen eine Funktion $a\colon I \to \mathbb{R}$ ist eine *Approximation von f am Punkt x_0 von n-ter Ordnung*, wenn
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - a(x)}{(x - x_0)^n} \;=\; 0.$$

Bemerkung.

(1) Die Intuition bei der Definition von “Approximation” ist wie folgt. Für x “nahe” bei x_0 wird der Nenner $(x - x_0)^k$ “sehr klein”. Damit der Grenzwert des Bruchs 0 ist,

[107] Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet man in der Literatur eine Funktion f als C^n-Funktion, wenn f n-fach differenzierbar ist, und wenn $f^{(n)}$ stetig ist. Wir werden diesen Begriff nicht verwenden.

muss auch der Zähler "sehr klein" werden, d.h. die Funktionswerte von a müssen "nahe" an den Funktionswerten von f liegen.

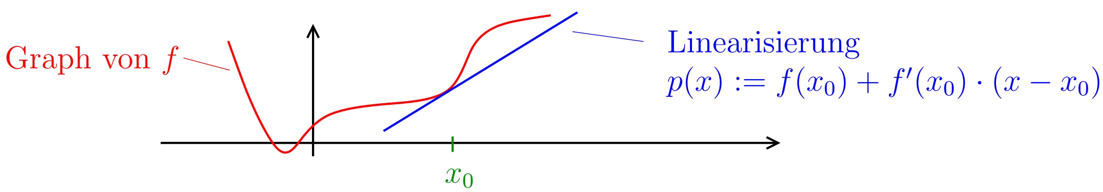
(2) Wenn a eine Approximation von k-ter Ordnung ist, dann ist a auch für jedes $l \leq k$ eine Approximation von l-ter Ordnung.[108]

Das Ziel ist eine "komplizierte" Funktion f durch einfachere Funktionen zu approximieren. Das folgende Lemma gibt uns ein wichtiges Beispiel einer Approximation.

Lemma 21.1. *Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall und es sei $x_0 \in I$. Die* Linearisierung

$$p(x) \;:=\; f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

ist eine Approximation von f am Punkt x_0 von erster Ordnung.



Beweis. Das Lemma folgt aus folgender Berechnung:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - p(x)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0))}{x - x_0} \\ &= \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\substack{= f'(x_0), \text{ per Definition} \\ \text{siehe auch Seite 145}}} - \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f'(x_0)\cdot(x - x_0)}{(x - x_0)}}_{= f'(x_0)} = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.\end{aligned}$$

■

21.3. **Taylorpolynome.** Wir haben in Lemma 21.1 gesehen, dass wir für eine gegebene differenzierbare Funktion an jedem Punkt x_0 eine Approximation erster Ordnung durch eine lineare Funktion geben können. Das Ziel ist nun zu zeigen, dass wir allgemeiner Approximationen n-ter Ordnung durch Polynome von Grad $\leq n$ geben können.

Um solche Polynome zu finden, beweisen wir erst einmal folgendes Lemma.

Lemma 21.2. *Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktionen auf einem offenen Intervall und es sei $x_0 \in I$. Für eine C^∞-Funktion $a\colon I \to \mathbb{R}$ gilt:*

$$\begin{array}{c} a \text{ ist eine Approximation von } f \\ \text{am Punkt } x_0 \text{ von } n\text{-ter Ordnung} \end{array} \iff \begin{array}{c} \text{für alle } k \in \{0, \ldots, n\} \\ \text{gilt } a^{(k)}(x_0) \;=\; f^{(k)}(x_0). \end{array}$$

---

[108] In der Tat, denn wenn $l < k$, dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - a(x)}{(x - x_0)^l} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - a(x)}{(x - x_0)^k} \cdot (x - x_0)^{k-l} = \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - a(x)}{(x - x_0)^k}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{x\to x_0} (x - x_0)^{k-l}}_{=0, \text{ da } k > l} = 0.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die "⇐"-Aussage. Wir nehmen also an, dass für $k = 0, \ldots, n$ gilt: $f^{(k)}(x_0) - a^{(k)}(x_0) = 0$. Dann gilt:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-a(x)}{(x-x_0)^n} \overset{l'H}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(1)}(x)-a^{(1)}(x)}{n\cdot(x-x_0)^{n-1}} \overset{l'H}{\underset{\uparrow}{=}} \ldots$$

da $f^{(k)}(x_0) - a^{(k)}(x_0) = 0$ für $k = 0, \ldots, n$ können wir die Regel 14.5 von l'Hôpital anwenden

$$\overset{l'H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-a^{(n-1)}(x)}{n!\cdot(x-x_0)} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)-a^{(n)}(x)}{n!} \underset{\uparrow}{=} \frac{f^{(n)}(x_0)-a^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$$

folgt aus Satz 14.1, und der Voraussetzung, dass $f^{(n)}$ und $a^{(n)}$ differenzierbar, also auch stetig sind

Wir wenden uns nun dem Beweis der "⇒"-Aussage zu.[109] Wir setzen $r(x) = f(x) - a(x)$. Wir nehmen also an, dass

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = 0,$$

und wir müssen folgende Behauptung beweisen.

Behauptung. Für $k = 0, \ldots, n$ gilt $r^{(k)}(x_0) = 0$

Es genügt zu zeigen, dass wenn wir ein $k \in \{0, \ldots, n\}$ haben, so dass $r^{(i)}(x_0) = 0$ für $i = 0, \ldots, k-1$, dann gilt auch $r^{(k)}(x_0) = 0$. Dies folgt in der Tat aus folgender Rechnung:

$$0 \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^k} \overset{l'H}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to x_0} \frac{r^{(1)}(x)}{k\cdot(x-x_0)^{k-1}} \overset{l'H}{\underset{\uparrow}{=}} \ldots \overset{l'H}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to x_0} \frac{r^{(k-1)}(x)}{k!\cdot(x-x_0)} \overset{l'H}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to x_0} \frac{r^{(k)}(x)}{k!}$$

nach Voraussetzung und der Bemerkung auf Seite 223

nach der Regel 14.5 von l'Hôpital, da $r(x) = r^{(1)}(x_0) = \cdots = r^{(k-1)}(x_0) = 0$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \lim_{x\to x_0} r^{(k)}(x) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{k!} \cdot r^{(k)}(x_0).$$

weil $r^{(k)}$ stetig. ∎

Es sei nun $f : I \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion und es sei $x_0 \in I$. Zur Erinnerung, wir suchen ein Polynom p vom Grad n, welches am Punkt x_0 eine Approximation von f von n-ter Ordnung ist. Nach Lemma 21.2 genügt es ein Polynom zu finden, dessen Funktionswert und dessen erste n Ableitungen am Punkt x_0 mit denen von f übereinstimmen.

Die Idee ist nun, Polynome von der Form[110][111]

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot (x-x_0)^i$$

zu betrachten. Bevor wir uns der Bestimmung der richtigen Koeffizienten b_i zuwenden, wollen wir erst einmal die Ableitungen von solch einem Polynom $p(x)$ am Punkt x_0 studieren. Wir beweisen dazu folgendes elementare Lemma.

---

[109] Im weiteren Verlauf der Vorlesung benötigen wir nur die "⇐"-Aussage. Wir geben den Beweis der "⇒"-Aussage nur der Vollständigkeit halber.

[110] Durch Ausmultiplizieren sieht man leicht, dass $\sum_{i=0}^{n} b_i \cdot (x-x_0)^i$ in der Tat ein Polynom ist.

[111] Die Linearisierung $f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0)$ ist genau von diesem Typ.

Lemma 21.3. *Es seien $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $k \in \mathbb{N}_0$, dass*

$$k\text{-te Ableitung von } x \mapsto \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot (x - x_0)^i \text{ am Punkt } x_0 \quad = \quad \begin{cases} k! \cdot b_k, & \text{wenn } k \leq n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Für ein beliebiges $i \in \{0, \ldots, n\}$ gilt:

$$k\text{-te Ableitung von } b_i \cdot (x - x_0)^i \quad = \begin{cases} 0, & \text{wenn } i < k, \\ i \cdot (i-1) \ldots (i-k+1) \cdot b_i \cdot (x - x_0)^{i-k}, & \text{wenn } i \geq k. \end{cases}$$

Insbesondere verschwindet die k-te Ableitung am Punkt x_0, außer für $k = i$. Für $k = i$ ist die Ableitung am Punkt x_0 dann gerade $k! \cdot b_k$. Das Lemma folgt nun aus der Summenformel für Ableitungen. ∎

Wenn die k-te Ableitung eines Polynoms $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i \cdot (x - x_0)^i$ mit der k-ten Ableitung von einer gegebenen Funktion f übereinstimmen soll, dann muss nach Lemma 21.3 also insbesondere $b_k = \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0)$ gelten. Diese Diskussion führt uns zu folgender Definition.

Definition. Es sei $f \colon I \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion auf einem offenen Intervall und es sei $x_0 \in I$. Wir bezeichnen

$$p_{n,x_0}(f)(x) \quad := \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

als das *n-te Taylorpolynom von f bei x_0*. Wenn f und x_0 aus dem Kontext klar ersichtlich sind, dann schreiben wir oft einfach auch $p_n(x)$.

Bemerkung. Wir können das n-te Taylorpolynom $p_n(x) := p_{n,x_0}(f)(x)$ natürlich auch wie folgt ausschreiben:

$$\underbrace{f(x_0)}_{k=0} + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{k=1} + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2}_{k=0} + \underbrace{\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3}_{k=3} + \cdots + \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n}_{k=n}.$$

Insbesondere sehen wir, dass das erste Taylorpolynom

$$p_1(x) \quad = \quad f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

nichts anderes als die Linearisierung ist, welche wir schon auf Seite 146 eingeführt hatten. Die Graphen der Taylorpolynome bis fünfter Ordnung für eine beliebige Funktion und ein beliebiges x_0 können hier betrachtet werden:

`https://www.desmos.com/calculator/qerqzsmoau`

Bevor wir uns den Beispielen zuwenden wollen wir noch schnell folgenden Satz formulieren und beweisen.

Satz 21.4. *Es sei $f \colon I \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion auf einem offenen Intervall und es sei $x_0 \in I$. Das n-te Taylorpolynom $p_{n,x_0}(f)$ ist eine Approximation zu f am Punkt x_0 von n-ter Ordnung.*

Beweis. Es folgt direkt aus Lemma 21.3 und der Definition des n-ten Taylorpolynoms, dass für $k = 0, 1, \ldots, n$ gilt $f^{(k)}(x_0) = p_{n,x_0}(f)^{(k)}(x_0)$. Es folgt also aus Lemma 21.2, dass $p_n(x)$ eine Approximation von f von n-ter Ordnung am Punkt x_0 liefert. ■

Beispiel. Wir betrachten die Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$. Wir wollen die Taylorpolynome bei $x_0 = 0$ bestimmen. Wir berechnen dazu folgende Tabelle:

k	k-te Ableitung von $\sin(x)$	k-te Ableitung bei $x_0 = 0$	$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$
0	$f^{(0)}(x) = \sin(x)$	$f^{(0)}(0) = 0,$	0
1	$f^{(1)}(x) = \cos(x)$	$f^{(1)}(0) = 1$	1
2	$f^{(2)}(x) = -\sin(x)$	$f^{(2)}(0) = 0$	0
3	$f^{(3)}(x) = -\cos(x)$	$f^{(3)}(0) = -1$	$-1/3!$
4	$f^{(4)}(x) = \sin(x)$	$f^{(4)}(0) = 0$	0
5	$f^{(5)}(x) = \cos(x)$	$f^{(5)}(0) = 1$	$1/5!$
$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$

Beispielsweise ist das 9-te Taylorpolynom der Sinusfunktion $\sin(x)$ bei $x_0 = 0$ gegeben durch:

$$p_9(x) = x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \frac{1}{9!} \cdot x^9.$$

Die Graphen von $\sin(x)$ und den ersten Taylorpolynomen bei $x_0 = 0$ kann man hier betrachten:

`https://www.desmos.com/calculator/gftfx6hrys`.

Wir sehen insbesondere, dass die Taylorpolynome von $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ bei $x_0 = 0$ gerade den Partialsummen der Reihe entsprechen. Wir werden gleich sehen, dass das kein Zufall ist.

Beispiel. Wir betrachten die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$. Wir wollen die Taylorpolynome bei $x_0 = 1$ bestimmen. Wir berechnen dazu folgende Tabelle:

k	k-te Ableitung von $\ln(x)$	k-te Ableitung bei $x_0 = 1$	$\frac{f^{(k)}(1)}{k!}$
0	$f^{(0)}(x) = \ln(x)$	$f^{(0)}(1) = 0,$	0
1	$f^{(1)}(x) = x^{-1}$	$f^{(1)}(1) = 1$	1
2	$f^{(2)}(x) = -1 \cdot x^{-2}$	$f^{(2)}(1) = -1$	$-1/2$
3	$f^{(3)}(x) = 2 \cdot x^{-3}$	$f^{(3)}(1) = 2$	$1/3$
4	$f^{(4)}(x) = -3! \cdot x^{-3}$	$f^{(4)}(1) = -3!$	$-1/4$
5	$f^{(5)}(x) = 4! \cdot x^{-4}$	$f^{(5)}(1) = 4!$	$1/5$
$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$

Beispielsweise ist das vierte Taylorpolynom von der Logarithmusfunktion $\ln(x)$ bei $x_0 = 1$ gegeben durch:

$$p_5(x) \quad = \quad (x-1) - \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{3} \cdot (x-1)^3 - \frac{1}{4} \cdot (x-1)^4 \quad = \quad \sum_{k=1}^{4} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} \cdot (x-1)^k.$$

Die Graphen der Logarithmusfunktion $\ln(x)$ und den ersten Taylorpolynomen bei $x_0 = 1$ kann man hier betrachten:

`https://www.desmos.com/calculator/vgf0kmkfy3`.

Satz 21.5. *Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem offenen Intervall und zudem sei $x_0 \in I$. Wenn es ein $\epsilon > 0$ und eine Folge $(c_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ von reellen Zahl gibt, so dass für jedes $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ gilt:*

$$f(x) \quad = \quad \sum_{j=0}^{\infty} c_j \cdot (x - x_0)^j,$$

dann ist das n-te Taylorpolynom von f bei x_0 gegeben durch:

$$p_{n,x_0}(f)(x) \quad = \quad \sum_{j=0}^{n} c_j \cdot (x - x_0)^j.$$

Beweis. Ähnlich wie im Beweis von Lemma 21.3 gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_0$:

$$k\text{-te Ableitung von } f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \cdot (x - x_0)^j \quad \overset{\substack{k\text{-faches Anwenden von Satz 20.6} \\ \downarrow}}{=} \quad \sum_{j=k}^{\infty} j \ldots (j-k+1) \cdot c_j \cdot (x - x_0)^{j-k}.$$

Also folgt:

$$f^{(k)}(x_0) \quad = \quad k! \cdot c_k.$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ können wir nun das n-te Taylorpolynom berechnen:

$$p_{n,x_0}(f)(x) \quad := \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{k! \cdot c_k}{k!} \cdot (x - x_0)^k \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot (x - x_0)^k.$$

■

Beispiel. Es gilt:

$$n\text{-tes Taylorpolynom von } \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ am Punkt } x_0 = 0 \quad \overset{\substack{\text{folgt aus Satz 21.5} \\ \downarrow}}{=} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Die Graphen von der Exponentialfunktion $\exp(x)$ und den zugehörigen ersten Taylorpolynomen bei $x_0 = 0$ kann man hier sehen:

`https://www.desmos.com/calculator/tllpm1c7ue`.

21.4. **Die Restgliedformel von Taylor.** Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion und es sei $x_0 \in I$. Wir hatten in Lemma 21.4 gesehen, dass das n-te Taylorpolynom

$$p_n(x) \;=\; p_{n,x_0}(f)(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

die ursprüngliche Funktion f im Punkt x_0 approximiert, in dem Sinne, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^n}$ verschwindet. Wir wollen jetzt im Folgenden eine genauere Aussage treffen, wie weit denn nun die ursprüngliche Funktion $f(x)$ und das n-te Taylorpolynom $p_n(x)$ wirklich auseinander liegen.

Wir wollen im Folgenden also die Differenz $f(x) - p_n(x)$ besser verstehen. Wir beginnen mit einer elementaren Vorbemerkung, nämlich für $n = 0$ können wir die Differenz wie folgt ausdrücken:

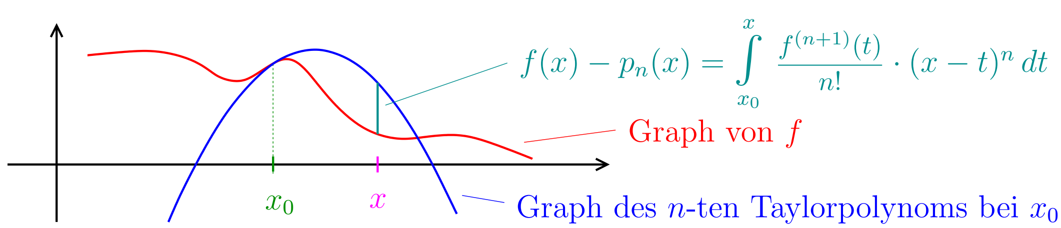
$$f(x) - p_0(x) \;=\; f(x) - f(x_0) \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus Satz 16.4.}}}{=}\; \int_{x_0}^{x} f^{(1)}(t)\, dt.$$

Der folgende Satz ist nun die Verallgemeinerung dieser Aussage für beliebige n.

Satz 21.6. (Restgliedformel von Taylor) *Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion auf einem offenen Intervall und es sei $x_0 \in I$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir mit $p_n(x) = p_{n,x_0}(f)(x)$ das n-te Taylorpolynom von f am Punkt x_0. Dann gilt für jedes $x \in I$:*

$$f(x) - p_n(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n\, dt.$$

Bemerkung. Die Differenz $f(x) - p_n(x)$ wird manchmal das *n-te Restglied von f bei x_0* genannt.



Beweis. Wir beweisen den Satz mithilfe von Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$. Den Fall $n = 0$ hatten wir oben schon behandelt. Nun nehmen wir an, die Aussage gilt für $n - 1$. Wir müssen dann zeigen, dass sie dann auch für n gilt. Wir führen dazu folgende Berechnung durch:

$$\begin{aligned}
f(x)-p_n(x) &= f(x)-\left(p_{n-1}(x)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n\right)\\
&= \underbrace{f(x)-p_{n-1}(x)}_{\substack{\text{hierauf wenden wir die}\\ \text{Induktionsvoraussetzung an}}} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n\\
&= \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{f^{(n)}(t)}_{=u(t)}\cdot\underbrace{\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}}_{=:v(t)}\,dt - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n\\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{partielle Integration}}}{\overset{p.\ I.}{=}} \left[\underbrace{f^{(n)}(x)}_{=u(t)}\cdot\underbrace{\frac{-(x-t)^n}{n!}}_{=V(t)}\right]_{t=x_0}^{t=x} - \int\limits_{x_0}^{x}\underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{=u'(t)}\cdot\underbrace{\frac{-(x-t)^n}{n!}}_{V(t)}\,dt - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n\\
&= \int\limits_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}\cdot f^{(n+1)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

■

Wir erhalten folgendes Korollar.

Korollar 21.7. *Es sei $f\colon I\to\mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion auf einem offenen Intervall und es sei $x_0\in I$. Wenn es ein $C\in\mathbb{R}$ gibt, so dass $|f^{(n+1)}(t)|\le C$ für alle t zwischen x_0 und x, dann gilt für alle $x\in I$, dass*

$$|f(x)-p_n(x)| \;\le\; \frac{C}{(n+1)!}\cdot|x-x_0|^{n+1}.$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall $x>x_0$. Nach Voraussetzung gilt für alle $t\in[x_0,x]$

$$-C \;\le\; f^{(n+1)}(t) \;\le\; C.$$

Wir führen nun folgende Schritte durch:

(1) Wir multiplizieren alle drei Terme mit der, auf dem Intervall $[x_0,x]$ nicht-negative, Funktion $t\mapsto\frac{(x-t)^n}{n!}$.
(2) Wir bestimmen das Integral von x_0 bis x.

Aus der Monotonieeigenschaft 15.5 des Integrals folgt

$$\underbrace{\int\limits_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}\cdot(-C)\,dt}_{=\left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot(-C)\right]_{=x_0}^{t=x}} \;\le\; \underbrace{\int\limits_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}\cdot f^{(n+1)}(t)\,dt}_{=\,f(x)-p_n(x)\text{ nach Satz 21.6}} \;\le\; \underbrace{\int\limits_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}\cdot C\,dt}_{=\left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot C\right]_{=x_0}^{t=x}}.$$

Durch explizites Berechnen der Integrale links und rechts, und durch Anwendung der Restgliedformel 21.6 von Taylor auf das mittlere Integral erhalten wir folgende Ungleichungen:

$$-C\cdot\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \;\le\; f(x)-p_n(x) \;\le\; C\cdot\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Aber ist genau die Aussage, welche wir beweisen sollten. Der Fall $x < x_0$ wird ganz ähnlich, mit nur kleinen Abwandlungen des Arguments, bewiesen. ■

Beispiel. Wir wollen jetzt Taylorpolynome verwenden, um die Werte der Sinusfunktion näherungsweise zu bestimmen. Es folgt aus der Diskussion auf Seite 226, oder aus Satz 21.5, dass das sechste Taylorpolynom der Sinusfunktion am Punkt $x_0 = 0$ gegeben ist durch

$$p_6(x) \;=\; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Die siebte Ableitung von der Sinusfunktion ist $-\cos(x)$. Der Absolutbetrag der Kosinusfunktion ist durch $C = 1$ beschränkt. Es folgt aus dem obigen Korollar 21.7, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\sin(x) - p_6(x)| \;\leq\; \frac{1}{7!} \cdot |x|^7.$$

Für kleine x gibt also $p_6(x)$ schon einen hervorragenden Näherungswert für $\sin(x)$. Beispielsweise folgt, dass

$$|\sin(0{,}1) - p_6(0{,}1)| \;<\; \frac{1}{5040 \cdot 10^7}.$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned}\sin(0{,}1) &= 0{,}09983341664 6828...\\ p_6(0{,}1) &= 0{,}09983341666 6666....\end{aligned}$$

21.5. **Die Taylor-Reihe.** Wir haben im vorherigen Teilkapitel gesehen, dass Taylorpolynome eine Funktion sehr gut approximieren können, und wir haben gesehen: je höher der Grad des Taylorpolynoms, desto besser ist die Approximation. Es stellt sich also die Frage, ob man dann nicht vielleicht den "Grenzwert $n \to \infty$" über die Taylor-Polynome p_n bilden kann. Dieser Gedanke führt uns zu folgender Definition.

Definition. Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion auf einem offenen Intervall und es sei $x_0 \in I$. Wir nennen

$$\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

die *Taylorreihe von f am Punkt x_0.*

Beispiel. Wenn eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall I durch eine konvergente Reihe der Form

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$$

gegeben ist, dann folgt aus Satz 21.5, dass die Taylor-Reihe von f im Punkt x_0 gerade durch diese Reihe gegeben ist. Insbesondere sind die Taylorreihen von $\exp(x), \sin(x)$ und $\cos(x)$ am Punkt $x_0 = 0$ gegeben durch

$$\exp(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \sin(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \;\text{ und }\; \cos(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Es stellen sich in diesem Zusammenhang folgende zwei Fragen:

Frage 21.8. *Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion auf einem offenen Intervall I und es sei $x_0 \in I$.*

(1) *Konvergiert die Taylor-Reihe $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k$ für alle $x \in I$?*

(2) *Wenn die Taylor-Reihe konvergiert, ist der Wert der Taylor-Reihe gerade der Funktionswert von f?*

Das folgende Beispiel gibt eine negative Antwort auf Frage 21.8 (1).

Beispiel. Wir betrachten die Funktion
$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2}. \end{array}$$

Für $|x|<1$ gilt:
$$f(x) \;=\; \frac{1}{1+x^2} \;=\; \frac{1}{1-(-x^2)} \;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{folgt aus } |x|<1 \text{ und Satz 3.16}}}{=}\; \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}.$$

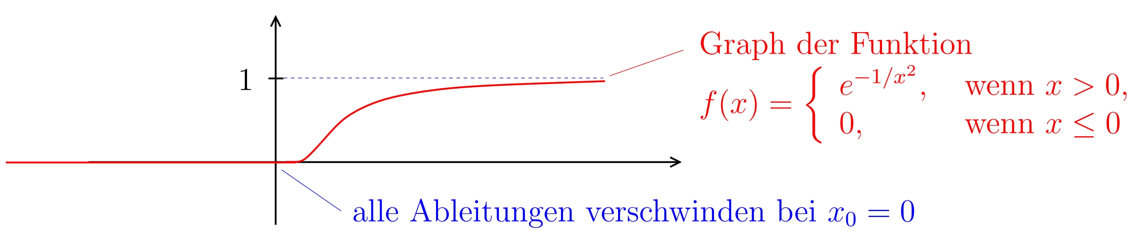
Die Reihe rechts ist also, nach der obigen Bemerkung, auch schon die Taylor-Reihe von f am Punkt $x_0 = 0$. Aber es folgt aus dem Quotienten-Kriterium 6.11 und dem Nullfolgen-Kriterium 6.3, dass diese Reihe konvergiert genau dann, wenn $x \in (-1,1)$. Insbesondere konvergiert die Taylor-Reihe *nicht* im ganzen Definitionsbereich der ursprünglichen Funktion f. Der Graph von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und seinen ersten Taylorpolynomen kann hier betrachtet werden:

`https://www.desmos.com/calculator/jkq7dfx9ct`

Im nächsten Teilkapitel behandeln wir Frage 21.8 (2).

21.6. Eine C^∞-Treppenfunktion.

Satz 21.9. *Die Funktion*
$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{wenn } x>0, \\ 0, & \text{wenn } x \leq 0 \end{cases} \end{array}$$
ist eine C^∞-Funktion und es gilt, dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.



Bemerkung. Die Ableitungen von f sind bei $x_0 = 0$ also alle 0. Insbesondere verschwinden alle Koeffizienten der Taylor-Reihe für f am Punkt 0. Mit anderen Worten, die Taylor-Reihe definiert die Null-Funktion. Andererseits gilt für alle $x>0$, dass $f(x)>0$. Wir sehen also, dass die Taylor-Reihe für kein $x>0$ mit der ursprünglichen Funktion übereinstimmt.

Insbesondere erhalten wir also eine negative Antwort auf Frage 21.8 (2). Mehr Details kann man auch hier finden:

`https://bar.wikipedia.org/wiki/Taylorreihe`

Beweis von Satz 21.9. Ein Induktionsargument zeigt, dass es genügt folgende Behauptung zu beweisen.

Behauptung. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ist die Funktion

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^{-k} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{wenn } x > 0, \\ 0, & \text{wenn } x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = \begin{cases} -k\cdot x^{-k-1}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + 2\cdot x^{-k-3}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{wenn } x > 0, \\ 0, & \text{wenn } x \leq 0. \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ ist $g(x)$ differenzierbar und es folgt aus der Produktregel, dass die Ableitung $g'(x)$ für $x \neq 0$ von der angegeben Form ist. Es verbleibt also zu zeigen, dass g im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar ist, und dass $g'(0) = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x\searrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} &= \lim_{x\searrow 0} \frac{x^{-k}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = \lim_{x\searrow 0} x^{-k-1}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Lemma 14.8}}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^{k+1}}{e^{x^2}} \underset{\uparrow}{\overset{l'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{(k+1)\cdot x^k}{2x\cdot e^{x^2}} \underset{\uparrow}{\overset{l'H}{=}} \ldots \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(k+1)!}{e^{x^2}\cdot\text{Polynom}} = 0. \end{aligned}$$

nach der Regel 14.5 von l'Hôpital

Zudem gilt auch:

$$\lim_{x\nearrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{für } x<0 \text{ gilt } g(x)=0}}{=} \lim_{x\nearrow 0} \frac{0-0}{x} = 0.$$

Wir haben also gezeigt, dass g im Punkt x_0 differenzierbar ist mit Ableitung $= 0$. ■

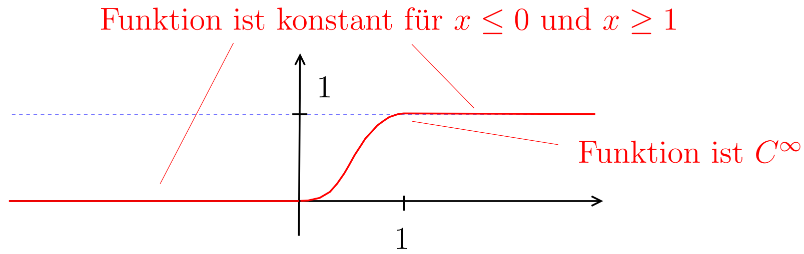
Wir beschließen das Kapitel mit folgendem Satz.

Satz 21.10. $(*)$ *Es gibt eine C^∞-Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *$h(x) = 0$ für $x \leq 0$,*
(2) *$h(x) = 1$ für $x \geq 1$, und*
(3) *h ist monoton steigend.*

Anders ausgedrückt, die Funktion von Satz 21.10 ist also konstant $= 0$ für $x \leq 0$ und konstant $= 1$ für $x \geq 1$, aber die Funktion ist trotzdem beliebig oft differenzierbar. Eine solche Funktion wird manchmal als C^∞-*Treppenfunktion* bezeichnet.

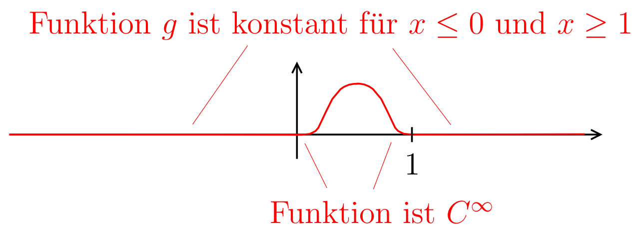
Bemerkung. Die Funktion, welche wir im Beweis von Satz 21.10 konstruieren beschreibt also eine angenehme Bahn eines Lifts: die Bahn ist konstant für $x \leq 0$ und $x \geq 1$ und dazwischen beliebig oft differenzierbar.



Beweis $(*)$. Wir betrachten wiederum die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{wenn } x > 0, \\ 0, & \text{wenn } x \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Wir hatten in Satz 21.9 gezeigt, dass dies eine C^∞-Funktion ist. Wir betrachten nun die durch $g(x) := f(x) \cdot f(1-x)$ definierte Funktion. Nachdem $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ folgt sofort, dass $g(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $g(x) = 0$ für $x \geq 1$, sowie $g(x) > 0$ für $x \in (0,1)$. Der Graph von g wird auch in Abbildung 21.6 skizziert.



Wir setzen[112] $C := \int_0^1 g(t)\, dt$. Wir müssen nun noch folgende Behauptung beweisen.

Behauptung. Die Funktion

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{C} \cdot \int_0^x g(t)\, dt \end{aligned}$$

hat die gewünschten Eigenschaften.

Es folgt aus dem Hauptsatz 16.3 der Differential- und Integralrechnung, dass h differenzierbar ist, mit Ableitung $h'(x) = \frac{1}{C} \cdot g(x)$. Nachdem g eine C^∞-Funktion ist, ist also auch h eine C^∞-Funktion. Es folgt nun leicht aus der Definition von h und den Eigenschaften von f, dass $h(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $h(x) = 1$ für $x \geq 1$. Zudem folgt aus dem Monotoniesatz 13.4, dass h monoton steigend ist. ■

[112] Warum ist das Integral > 0?

Index

$\cos(t)$, 134
$\inf(M)$, 67
$\sin(t)$, 134
$\sup(M)$, 63
π, 139
$\sqrt[q]{x}$, 68
$\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$, 101
$\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$, 101
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, 101
e, 90

Abbildung
  bijektiv, 59
  injektiv, 59
  surjektiv, 59
Ableitung, 146
Ableitung einer Funktion im Punkt x_0, 145
Ableitungsregeln, 147
Archimedisches Axiom, 18
Arkuskosinus, 167
Arkussinus, 167
Arkustangens, 165
Aufleitung, 187

Bernoullische Ungleichung, 25
Beschränktheitssatz, 108
Binomischer Lehrsatz, 27

Cauchy-Folge, 51, 130
Cauchy-Produktformel, 88

Definition der bestimmten Konvergenz, 41
Definition der komplexen Zahlen, 124
Definition der Konvergenz einer Folge, 32
Definition des Grenzwertes einer Reihe, 48, 73
Definition einer (streng) monotonen Folge, 46
Definition einer Folge, 31
Definition einer Reihe, 47, 73
Definition von $\mathbb{C}$, 124
Definition von $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, 32
Definition von $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, 41
Definition von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, 48, 73
Definition von a^x mit $x \in \mathbb{R}$, 122
Definition von a^x mit $x \in \mathbb{Z}$, 13
Definition von Partialsummen, 47, 73
Dezimaldarstellung von reellen Zahlen, 57
Differenzenquotient, 145

Einheitswurzeln, 144
Eulersche Formel, 134
Eulersche Zahl, 90
Exponentialreihe, 89
Extremum
  lokal, 156

Folge
  beschränkt, 31
  Cauchy-Folge, 51, 206
  divergiert, 33
  konvergiert, 33
Fundamentalsatz der Algebra, 126
Funktion
  C^∞, 222
  n-fach differenzierbar, 154, 222
  (streng) monoton fallend, 113
  (streng) monoton steigend, 113
  differenzierbar, 146
  differenzierbar in einem Punkt x_0, 145
  Dirichlet-Funktion, 176
  elementar, 191
  Exponentialfunktion, 90
  gleichmäßig stetig, 106

Logarithmusfunktion, 120
stetig, 93, 215
stetig differenzierbar, 153
Wurzelfunktion, 119
Funktionalgleichung
Exponentialfunktion, 90
Logarithmusfunktion, 119
Funktionenfolge
punktweise konvergent, 203
Funktionfolge
konvergiert gleichmäßig, 205, 213

Gamma-Fuktion, 200
Graph einer Funktion, 92
Grenzfunktion, 203
Grenzwert
einer Funktion, 101
linksseitig, 101
rechtsseitig, 101
Grenzwerte von Funktion, 101

harmonische Reihe, 76
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 188

Infimum, 67
Integral, 176
uneigentlich, 197
Integral-Vergleichskriterium, 198
integrierbar, 176

Körperaxiome, 6
Kettenregel, 150
komplexe Zahl
Betrag, 127
Imaginärteil, 126
komplex konjugierte, 126
Realteil, 126
Konvergenzsatz für monotone Folgen, 53

Leibniz-Kriterium, 77
Linearisierung einer Funktion an einem Punkt, 146
Los Alamos Satz, 41

Majoranten-Kriterium, 79, 131
Maximum, 63
global, 156
lokal, 156
striktes lokales, 162
Menge
überabzählbar, 59
abzählbar, 59
nach oben beschränkt, 63
nach unten beschränkt, 67
Minimum, 67
global, 156
lokal, 156
striktes lokales, 162
Minoranten-Kriterium, 80
Mittelwertsatz der Differentialrechnung, 157

Negation von Quantoren, 30
Nullfolgen-Kritierum, 75

obere Schranke, 63
Obersumme $O(f, Z)$, 174
Ordnungsaxiome, 14

Partielle Integration, 191
Polarkoordinaten, 141
Potenzregeln, 122
Potenzreihe, 214
Prinzip der Kontraposition, 5
Prinzip der vollständigen Induktion, 23
Produktregel für Ableitungen, 147

Quantoren, 29
Quotienten-Kriterium, 81, 131
Quotientenregel für Ableitungen, 147

Rechenregeln für Grenzwerte, 36, 43, 44
Rechenregeln für Reihen, 49, 74
Regel von l'Hôpital, 168, 171
Restglied, 228

Riemann-Integral, 176
Riemann-integrierbar, 176
Riemannsches Integrabilitätskriterium, 182

Sandwichsatz, 40
Satz über die Existenz von Maximum und Minimum, 109
Satz über die Polarkoordinatendarstellung, 141
Satz des moralischen Dilemmas, 112
Satz von Bolzano-Weierstraß, 70
Satz von der Existenz des Supremums, 64
Satz von der Stetigkeit der Umkehrfunktion, 117
Satz von Rolle, 158
Stammfunktion, 187
Stetigkeit, 93, 215
Stetigkeit der Exponentialfunktion, 100
Substitutionsregel für Integrale, 196
Substitutionsregel für Stammfunktionen, 194
Supremum, 63
Supremumsnorm einer Funktion, 204, 213

Tachosatz, 161
Tangente zu einem Graph an einem Punkt, 146
Taylor-Reihe, 230
Taylorpolynom, 225
Teilfolge, 69

Umkehrfunktion, 115
Umkehrregel der Ableitung, 151
Umordnung einer Reihe, 84
Umordnungssatz, 85
untere Schranke, 67
Untersumme $U(f, Z)$, 174

Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung, 169
Vollständigkeitsaxiom, 18, 52

Zerlegung eines Intervalls, 174
Zwischenwertsatz, 110